付録 A
Grassmann数

グルーオンのように，スピンが整数のボーズ粒子は Bose 統計に従う．それに対して，クォークのように，スピンが半奇整数のフェルミ粒子は，Fermi 統計に従う．正準量子化においては，Bose 統計に従う場 (ボソン場）の演算子は，交換関係に従うが，Fermi 統計に従う場 (フェルミ場）の演算子は，反交換関係に従う．経路積分量子化においては，ボソン場の演算子を単なる古典場に置き換えた．しかし，フェルミオン場の演算子は，フェルミオン場の古典的対応物として“ 反交換する数 ”に置き換えなくてはならない．これは，グラスマン（H.G.Grassmann）数を導入することで達成される[*1)]．

A.1　グラスマン数

Grassmann 数 $\theta_j (j = 1, \cdots N)$ は，

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (i, j = 1, \cdots, N) \tag{A.1}$$

の関係を満たす．これから，同じ Grassmann 数を掛けるとゼロになる．

$$\theta_i^2 = \theta_i \theta_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{A.2}$$

Grassmann 数の関数は，その引数のべき級数展開で定義されるが，上の性質より，必ず有限次の多項式となる．

$$f(\theta) = f_0 + f_i \theta_i + f_{ij} \theta_i \theta_j + \cdots + f_{12 \cdots N} \theta_1 \cdots \theta_N \tag{A.3}$$

特に，1 種類しかないときは，$f(\theta) = f_0 + f_1 \theta$ となる．Grassmann 数での微分 $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ は，

*1）F.A. Berezin, The Method of Second Quantization (Academic Press, 1966). Y. Ohnuki and T. Kashiwa, Prog. Theor. Phys. **60**, 548 (1978).

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}\theta_i = \delta_{ij} \tag{A.4}$$

と定義する．一方，積分 $\int d\theta_j$ は，

$$\int d\theta_j \theta_i = \delta_{ij}, \quad \int d\theta_i 1 = 0 \tag{A.5}$$

のように，微分と同じ操作として定義できる．

$$\int d\theta_j f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} f(\theta) \tag{A.6}$$

こうしておくと積分は，

1) 線形性

$$\int d\theta \left[a f(\theta) + b g(\theta) \right] = a \int d\theta f(\theta) + b \int d\theta g(\theta), \quad (a, b \in \boldsymbol{C}) \tag{A.7}$$

2) 部分積分（可能性）

$$\int d\theta_j \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} f(\theta) \right] = 0 \tag{A.8}$$

を満たすことがわかる．

Grassmann 数での微分や積分操作は，Grassmann 数とも反交換することに注意する必要がある．

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \{\theta_i, d\theta_j\} = \{d\theta_i, d\theta_j\} = 0 \tag{A.9}$$

例えば，右側から微分するか，左側から微分するかで符号が逆になるので，右微分と左微分を区別する必要がある．右微分は，

$$\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} \equiv \theta_i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_j} = -\frac{\partial}{\partial \theta_j}\theta_i = -\delta_{ij} \tag{A.10}$$

左微分は，

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}\theta_i \equiv \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \theta_j}\theta_i = \delta_{ij} \tag{A.11}$$

上の積分の定義から，ε を θ と独立な Grassmann 数として，

$$\begin{aligned} \int d(\theta + \varepsilon) f(\theta + \varepsilon) &= \int d\theta f(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta + \varepsilon) = \int d\theta f(\theta + \varepsilon) \end{aligned} \tag{A.12}$$

が導け，測度についてのシフト不変性

$$d(\theta + \varepsilon) = d\theta \tag{A.13}$$

が満たされる．これは部分積分可能性と等価である．

N 重積分は，

$$d^N\theta = d\theta_N \cdots d\theta_2 d\theta_1, \quad \int d^N\theta f(\theta) = f_{12\cdots N} \tag{A.14}$$

変数変換 $\theta'_i = A_i{}^j \theta_j$ に対して,

$$d^N\theta = (\det A) d^N\theta', \quad d^N\theta' = (\det A)^{-1} d^N\theta \tag{A.15}$$

が導かれる.（$(\det A)$ の入り方が通常の場合と逆数の関係になる.）

δ 関数は,

$$\delta(\theta - \theta_0) = \theta - \theta_0 \tag{A.16}$$

と定義すると,

$$\int d\theta \delta(\theta - \theta_0) f(\theta) = f(\theta_0) \tag{A.17}$$

を満たすことが簡単に確かめられる.

Fourier 変換に対応して,

$$\int d\theta e^{\theta\xi} = \delta(\xi) \tag{A.18}$$

が成り立つことが容易にわかる.

Gauss 積分公式は通常と逆数の結果になる.

$$\begin{aligned} &\int d\theta d\xi \exp\left(\xi^{\mathrm{T}} A\theta\right) = \det A \\ &\qquad d\theta d\xi \equiv (d\theta_N d\xi_N) \cdots (d\theta_2 d\xi_2)(d\theta_1 d\xi_1) \\ &\qquad\qquad = d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_N d\xi_1 \xi_2 \cdots d\xi_N \end{aligned} \tag{A.19}$$

これも，$\theta' = A\theta$ と変数変換して，上の公式を使えば示せる.

複素 Grassmann 数 ψ_j も 2 組の実 Grassmann 数 ξ_j, η_j から

$$\psi_j = \xi_j + i\eta_j, \quad \psi_j^* = \xi_j - i\eta_j \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{A.20}$$

と定義される．積分は,

$$\int d\psi_i \psi_i = 1, \quad \int d\psi_i^* \psi_i^* = 1, \quad \text{他は } 0 \tag{A.21}$$

として，矛盾しない．Gauss 積分公式

$$\int d\psi d\psi^* \exp\left(\psi^\dagger A\psi\right) = \det A \tag{A.22}$$

も得られる.

通常の可換な数の場合は，実変数 $x = (x_1, \cdots, x_N)$ に対して,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_N}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x, Ax) + (J, x)\right] \\ =&\frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left[\frac{1}{2}(J, A^{-1}J)\right] \end{aligned} \tag{A.23}$$

また，複素数 $z=(z_1,\cdots,z_N)$ に対して，

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}}\cdots\int \frac{dz_N}{\sqrt{\pi}}\int \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}}\cdots\int \frac{dz_N^*}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-(z^*,Az)\right]=\frac{1}{\mathrm{Det}A} \tag{A.24}$$

勿論，これらは，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2}=\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{A.25}$$

から導ける．

演習問題

1.1 変数変換に伴う測度の変換公式 (A.15) を導け．

1.2 (A.17) を確かめよ．

1.3 (A.18) を確かめよ．

1.4 Gauss 積分公式 (A.19) を導け．

付録 B
数学公式

本書を読むのにも必要な，便利ないくつかの公式をまとめておく．

B.1　汎関数微分

関数 f の関数 F，すなわち，汎関数 F は，x の関数 $f(x)$ と区別するために，$F[f]$ と書かれる．このとき，関数 f の 1 変数 x による微分は

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \tag{B.1}$$

多変数関数 $f(x,y,z)$ の場合の y に関する偏微分は次式で定義される．

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x, y+\epsilon, z, \cdots) - f(x, y, z, \cdots)}{\epsilon} \tag{B.2}$$

ちなみに，$f(x,y,z)$ の全微分は，次式で与えられる．

$$df = dx\frac{\partial f}{\partial x} + dy\frac{\partial f}{\partial y} + dz\frac{\partial f}{\partial z} \tag{B.3}$$

同様にして，汎関数微分 (functional derivative) は次式で定義される．

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \epsilon\delta^{(D)}(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon} \tag{B.4}$$

例えば，

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta^{(D)}(x-y) \tag{B.5}$$

$$\frac{\delta \int d^D x f(x)}{\delta f(y)} = 1 \tag{B.6}$$

$$\frac{\delta \int d^D x f^n(x)}{\delta f(y)} = n f^{n-1}(y) \tag{B.7}$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(y)} = \frac{\delta \int d^D x \mathscr{L}[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = \frac{\partial \mathscr{L}(\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi(x)} \tag{B.8}$$

B.2 Gauss 積分公式

1次元（1変数）の Gauss 積分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}a\phi^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (a > 0) \tag{B.9}$$

1次の項が入った場合は，指数関数の引数を平方完成することで，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-\frac{1}{2}a\phi^2 + j\phi} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{1}{2}a^{-1}j^2} \tag{B.10}$$

多次元（多変数）の Gauss 積分公式：実変数 $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_N)$ と $N \times N$ 行列 A に対して，

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi_N}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) + (J, \phi)\right] \\ =& \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left[\frac{1}{2}(J, A^{-1}J)\right] \\ =& \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\det A + \frac{1}{2}(J, A^{-1}J)\right] \end{aligned} \tag{B.11}$$

ここで，

$$(\phi, A\phi) := \phi_j A_{jk}\phi_k, \quad (J, \phi) := J_k\phi_k, \quad (J, A^{-1}J) = J_j(A^{-1})_{jk}J_k. \tag{B.12}$$

ちなみに，Fresnel(フレネル) 積分の公式は，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\phi e^{-i\frac{1}{2}\phi A\phi + iJ\phi} = \left(\frac{2\pi}{iA}\right)^{\frac{1}{2}} e^{+i\frac{1}{2}JA^{-1}J} \tag{B.13}$$

B.3 Levi-Civita テンソル

Levi-Civita テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は，次式で定義される完全反対称テンソルである．

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & ((\mu\nu\rho\sigma)=(0123) \text{ の偶置換}) \\ -1 & ((\mu\nu\rho\sigma)=(0123) \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{B.14}$$

Levi-Civita テンソル $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は次の性質を持つ．

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\sigma\tau\lambda} = -\begin{vmatrix} \delta^\mu{}_\rho & \delta^\mu{}_\sigma & \delta^\mu{}_\tau & \delta^\mu{}_\lambda \\ \delta^\nu{}_\rho & \delta^\nu{}_\sigma & \delta^\nu{}_\tau & \delta^\nu{}_\lambda \\ \delta^\alpha{}_\rho & \delta^\alpha{}_\sigma & \delta^\alpha{}_\tau & \delta^\alpha{}_\lambda \\ \delta^\beta{}_\rho & \delta^\beta{}_\sigma & \delta^\beta{}_\tau & \delta^\beta{}_\lambda \end{vmatrix} \tag{B.15}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\sigma\tau\beta} = -(D-3)\begin{vmatrix} \delta^{\mu}{}_{\rho} & \delta^{\mu}{}_{\sigma} & \delta^{\mu}{}_{\tau} \\ \delta^{\nu}{}_{\rho} & \delta^{\nu}{}_{\sigma} & \delta^{\nu}{}_{\tau} \\ \delta^{\alpha}{}_{\rho} & \delta^{\alpha}{}_{\sigma} & \delta^{\alpha}{}_{\tau} \end{vmatrix} \tag{B.16}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -(D-3)(D-2)\begin{vmatrix} \delta^{\mu}{}_{\rho} & \delta^{\mu}{}_{\sigma} \\ \delta^{\nu}{}_{\rho} & \delta^{\nu}{}_{\sigma} \end{vmatrix} \tag{B.17}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\rho\nu\alpha\beta} = -(D-3)(D-2)(D-1)\delta^{\mu}{}_{\rho} \tag{B.18}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -(D-3)(D-2)(D-1)D \tag{B.19}$$

また，これらの公式の帰結として，次の関係が導かれる．

$$\varepsilon^{\rho\sigma\tau\lambda}A_{\mu\rho}A_{\nu\sigma}A_{\alpha\tau}A_{\beta\lambda} = -(\det A)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = (\det A)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{B.20}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\rho\sigma\tau\lambda}A_{\mu\rho}A_{\nu\sigma}A_{\alpha\tau}A_{\beta\lambda} = (D-3)(D-2)(D-1)D\det A \tag{B.21}$$

B.4　行列の関数に関する便利な公式

1. Hausdorff の公式，または，Baker-Campbell-Hausdorff の公式[*1)]

$$e^X e^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X-Y,[X,Y]] + \cdots\right) \tag{B.22}$$

特に，$[X,Y]$ が X とも Y とも可換な場合は，

$$e^X e^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]\right) = e^X e^Y e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{B.23}$$

2. 任意の行列 X, Y に対して，

$$\begin{aligned} e^Y X e^{-Y} =& X + [Y,X] + \frac{1}{2!}[Y,[Y,X]] + \cdots \\ =& [\exp\Delta_Y]X \equiv \left[1 + \Delta_Y + \frac{1}{2!}(\Delta_Y)^2 + \cdots\right]X \end{aligned} \tag{B.24}$$

が成り立つ．ここで，$\Delta_Y Z := [Y,Z]$ と定義した．

3. 任意の行列 A に対して，次の公式が成り立つ．

$$\ln\det A = \mathrm{tr}\ln A \quad \Longrightarrow \quad \det A = \exp[\mathrm{tr}\ln A] \tag{B.25}$$

4. 任意の行列 B に対して，次の公式が成り立つ．

$$\det(1+\epsilon B) = 1 + \epsilon\,\mathrm{tr}(B) + \frac{1}{2}\epsilon^2[(\mathrm{tr}(B))^2 - \mathrm{tr}(B^2)] + O(\epsilon^3). \tag{B.26}$$

*1)　証明は，佐竹一郎，リー群の話（日本評論社，1982）などを参照せよ．

B.5 ベクトルの内積と外積

3 つのベクトルに対して,

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{A})=\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}). \tag{B.27}$$

$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}. \tag{B.28}$$

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times\mathbb{C}=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}-\mathbb{A}(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C}). \tag{B.29}$$

これから，次の恒等式を得る.

$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})+\mathbb{B}\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A})+\mathbb{C}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B})=0. \tag{B.30}$$

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times\mathbb{C}+(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\times\mathbb{A}+(\mathbb{C}\times\mathbb{A})\times\mathbb{B}=0. \tag{B.31}$$

さらに，4 つのベクトルに対して,

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D})=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D})-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C}). \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D})&=(\mathbb{A}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}))\mathbb{B}-(\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}))\mathbb{A}\\&=(\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{D}))\mathbb{C}-(\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}))\mathbb{D}.\end{aligned} \tag{B.33}$$

*2)

B.6 座標系とベクトル解析

デカルト座標系 (x,y,z) では，スカラー f に対して,

$$\boldsymbol{\nabla} f=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{B.37}$$

$$\triangle f=\boldsymbol{\nabla}^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{B.38}$$

---

*2) これらの関係式は, 以下のようにして導ける.

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=\epsilon^{abc}A^aB^bC^c. \tag{B.34}$$

$$\begin{aligned}\{\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\}^x&=\epsilon^{xay}A^a(\epsilon^{ybc}B^bC^c)\\&=(\epsilon^{xay}\epsilon^{ybc})A^aB^bC^c\\&=(\delta^{xb}\delta^{ac}-\delta^{xc}\delta^{ab})A^aB^bC^c\\&=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})B^x-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})C^x.\end{aligned} \tag{B.35}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D})&=\epsilon^{xab}A^aB^b\epsilon^{xcd}C^cD^d\\&=(\delta^{ac}\delta^{bd}-\delta^{ad}\delta^{bc})A^aB^b\epsilon^{xcd}C^cD^d\\&=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D})-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C}).\end{aligned} \tag{B.36}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.39}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned} \tag{B.40}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ は，それぞれ ρ, φ, z 方向の単位ベクトルである．

円柱座標 (ρ, φ, z) では，スカラー f に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \tag{B.41}$$

$$\triangle f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{B.42}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_z\boldsymbol{e}_z$ に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{B.43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \tag{B.44}$$

ここで，$\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ は，それぞれ ρ, φ, z 方向の単位ベクトルである．

球座標 (r, θ, φ) では，スカラー f に対して，

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}\triangle f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned} \tag{B.46}$$

ベクトル $\boldsymbol{A} = A_r\boldsymbol{e}_r + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A_r \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{B.47}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \boldsymbol{e}_\theta \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] \\
&\quad + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \qquad \text{(B.48)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ は，それぞれ r, θ, φ 方向の単位ベクトルである．

B.7　スピン角運動量の行列表示

角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ の行列表示は，$(2J+1)$ 行 $(2J+1)$ 列の行列で
$J = \frac{1}{2}$ では

$$
J_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(B.49)}
$$

$J = 1$ では

$$
J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(B.50)}
$$

（例えば，シッフ，量子力学の §27 − 8 を見よ．）

$$
S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(B.51)}
$$

（例えば，メシア，量子力学の第 13 章 §21 を見よ．）

付録 C
群と群の表現

ゲージ群 G に関する群論的側面をまとめる．ここに書いてあることは，単なる覚書であるので，正しい理解のためには，群論とその表現に関する成書を読まれたい[*1)]．

C.1　群の基本概念と群論における用語

群 G とは，その元 g，$g', g'', \cdots$ に対して，次の条件を満たす集合 $G = \{g, g', g'', \cdots\}$ である．

1) 積の存在：群の二つの元 g，g' に対し積 gg' が存在し，これも G の元であること．

2) 結合則：$(g'g'')g''' = g'(g''g''')$ が成立する．

3) 単位元の存在：すべての元 g に対し，$eg = ge = g$ となる元 e（単位元）が存在する．

4) 逆元の存在：すべての元 g に対し，$g^{-1}g = gg^{-1} = e$ となる元 g^{-1}（逆元）が存在する．

特に，$g_1g_2 = g_2g_1$ が成立する場合を**アーベル群**（Abelian group）という．そうでない場合を，**非アーベル群**（non-Abelian group）という．

(0) 二つの集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が**全射**（X から Y の**上への写像**）であるとは，Y の任意の元 y に対して，$f(x) = y$ となるような元 x が X の中にあることである．この場合，一般には X の中の複数の元が y に対応

---

*1）例えば，佐藤光，群と物理（丸善，1992）; 吉川圭二，群と表現 (岩波，1996）; H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics (Benjamin Cummings, 1982); (邦訳）九後汰一郎訳，物理学におけるリー代数 (吉岡書店，1990）. F.E. Close, An Introduction to Quarks and Partons (Academic Press, London, 1979). Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, Gague theory of elementary particle physics (Clarendon Press, Oxford, 1984).

している．これに対し X の異なる二つの元 x，x' に対して $f(x) \neq f(x')$ であるとき，f を**単射**（X から Y への 1 対 1 写像）という．この場合，$f(x)$ は，Y のすべての元をつくしているとは限らない．集合 X と Y の全ての元の間に 1 対 1 の対応がある場合，すなわち，X から Y の上への 1 対 1 写像，あるいは，全射かつ単射な写像を**全単射**という．

(1) 二つの群 G，G' が**同型**である（$G \simeq G'$）とは，元 $g \in G$ と $g' \in G'$ の間に 1 対 1 の対応があり，積の関係 $g_i g_j = g_k$ に対して，$g'_i g'_j = g'_k$ が成り立つことである．

(2) 二つの群 G，G' が**準同型**である（$G \sim G'$）とは，G から G' への全射 f により，G の元 g と G' の元 g' の間に対応関係 $g' = f(g)$ があるとき，G の任意の 2 元 g_i，g_j に対して準同型写像（homomorphism）

$$f(g_i)f(g_j) = f(g_i g_j) \tag{C.1}$$

が成り立つことである．特に，準同型写像 f が全単射のときに f は**同型写像**（isomorphism）といい，このとき G と G' は同型になる．また，群 G から G 自身への準同型を G の**自己準同型**（endomorohism），同型を**自己同型**（automorphism）という．群 G から群 G' への準同型写像 f によって G' の単位元 e' に写像されるような G の元の集合 K を写像 f の**核**という．

(3) 群 G の元 a に対し，$gag^{-1}(g \in G)$ の形の元を a に共役な元という．元 a に共役な全ての元の集合 $\{gag^{-1}, {}^{\forall}g \in G\}$ を a の**共役類**（conjugate class）または類という．群 G のすべての元は異なる類に類別することができる．群 G の部分群 H に対し，G の一つの元 g に関する H の各元の共役元の集合，gHg^{-1} はやはり G の部分群となり，これを H の**共役部分群**という．この部分群は明らかに H に同型であるが，特に G に任意の元 g に対して

$$gHg^{-1} = H \tag{C.2}$$

となるような部分群 H を G の**不変部分群**（invariant subgroup）または**正規部分群**という．

(4) 群 G の部分群 H の各元に G のある元 g を右から掛けて得られる集合 Hg を群 G の H による**右剰余類**（right coset）という．同様に g を左から掛けて得られる集合 gH を**左剰余類**（left coset）という．異なる剰余類は共役な元を持たない．この性質を使って群 G の元の集合を剰余類の和に分解できる（剰余類分解）．群 G の不変部分群 H に対しては，右剰余類と左剰余類とは等しく，区別する必要はない．二つの剰余類の積を

$$(Hg_i)(Hg_j) = Hg_i g_j \tag{C.3}$$

で定義すると，剰余類の集合は群をつくる．この群を，**剰余類群**（residue class group），あるいは**商群**（quotient group）または**因子群**（factor group）といい，G/H と表す．

定理 6（準同型定理） G，G' が準同型であるとし，準同型写像 $f: G \to G'$ の核を H とすると H は G の不変部分群になっている．そこで商群 G/H から G' の上への写像 $\hat{f}: G/H \to G'$ を $\hat{f}(Hg_i) = f(g_i)$ によって定義すれば $\hat{f}$ は同型写像であり，従って

$$G/H \simeq G' \tag{C.4}$$

である．

(5) n 次正則[*2)]行列全体の集合は，行列の積に関して，群をつくる．これを**一般線形変換群** $GL(n, \boldsymbol{C})$ という．群 G から，群 $GL(n, \boldsymbol{C})$ の中への準同型写像 D を群 G の（行列）**表現**（representation）という．言い換えると，群 G の各元 g_i に対応して n 行 n 列の正則行列 $D(g_i)$ が与えられており，群の元の間の関係

$$g_i g_j = g_k \tag{C.5}$$

に対応して，行列の間に，

$$D(g_i)D(g_j) = D(g_k) \tag{C.6}$$

が成り立っている．1 次変換 D の作用するベクトル空間を**表現空間**，この空間の基底を表現の基底という．$D(g_i)$ を**表現行列**といい，行列の大きさ n を**表現の次元**（dimension）という．群の元と表現行列の間の対応は，準同型であるから一般には多対 1 である．例えば，群のすべての元に単位行列 $\mathbf{1}$ を対応させる表現を**恒等表現**という．特に，1 対 1 の対応のとき，すなわち D が同型写像のときは**忠実な表現**（faithful representation）という．

(6) 既約表現

二つの表現 $U(A)$，$U(B)$ があるとき，各表現の基底 ξ_j, η_k の積 $\xi_j \eta_k$ を基底にして張られる空間での表現 $U(AB)$ を

$$U(AB)(\xi_j \eta_k) = \xi'_j \eta'_k = (U(A)\xi_j)(U(B)\eta_k) \tag{C.7}$$

で定義して直積表現といい，

$$U(AB) = U(A) \otimes U(B) \tag{C.8}$$

と書く．直積表現は，一般には**可約**（reducible）表現である．すなわち表現行列 $U(A)$ が，任意の元 A に対し

*2） 行列 T が正則であるとは，逆行列 T^{-1} が存在すること，あるいは $\det T \neq 0$ であること．

$$
U(A) = \left(\begin{array}{c|c|c} U_1(A) & 0 & 0 \\ \hline 0 & U_1(A) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right) \tag{C.9}
$$

のように分解できる．このとき

$$
U = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k \tag{C.10}
$$

と書く．このような分解ができないときは**既約**（irreducible）であるという．

C.2 リー群とその例

① 有限個の連続パラメータで特徴付けられ，それらのパラメータに連続的に依存するような積が定義されているような要素をもつ群を**リー群**（Lie group）という．

② 言い換えると，リー群とは，複素正則行列全体のつくる群 $GL(N, \boldsymbol{C})$ の閉部分群で連続的に閉じたものである．

③ そのパラメータのとり得る範囲がコンパクト（compact）である（つまり有界閉区間）とき，**コンパクト・リー群**という．コンパクト（リー）群の表現は，ユニタリー演算子による表現，**ユニタリー表現**と等価である．例えば，$U(N)$，$SU(N)$，$O(N)$，$SO(N)$，$Sp(2N, \boldsymbol{R})$ 等は，コンパクト群である．

　これに対し，群のパラメータの取りうる範囲が無限区間にわたる群を**ノンコンパクト（non compact）群**という．例えば，$GL(N, \boldsymbol{C})$，$GL(N, \boldsymbol{R})$，$SL(N, \boldsymbol{C})$，$SL(N, \boldsymbol{R})$，$O(N, \boldsymbol{C})$ やローレンツ群 $O(3,1)$ 等は，ノンコンパクト群である．

④ リー群 G の単位元の近傍にある任意の元 g は，**リー代数** X によって $g = \exp X = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim G} t^i X_i\right)$ と表すことができる．

⑤ N 次ユニタリー（unitary）群 $U(N)$ において，エルミートな N^2 個の生成子のうち単位元に比例した生成子 T_0 の作る変換 $\exp(i\theta^0 T_0)$ は $U(1)$ 部分群をなすが，不変部分群である．U(N) から U(1) を取り除いた残りのものは，トレースがゼロの (N^2-1) 個の生成子のつくる群で，行列式 1 の特殊ユニタリー群（special unitary group）$SU(N)$ である．

⑥ 群 G は G 自身と $\{1\}$ 以外には不変部分群を持たないとき，**単純群** (simple group) と呼ばれる．例えば，$SU(N)$ は $SU(N)$ 自身と $\{1\}$ 以外には不変部分群を持たないから単純群である．よって，$U(N)$ は $U(1)$ 群と単純群 $SU(N)$ の直積に分解される．

$$
U(N) \simeq U(1) \times SU(N) \tag{C.11}
$$

⑦　一般に，N 次**直交群**（orthogonal group）$O(N)$ の元は行列式が 1 か -1 を持つが，行列式が 1 の元の集合は，$O(N)$ の部分群をつくり，**特殊直交群**（special orthogonal group）または N 次回転群 $SO(N)$ となる．$SO(N)$ の元は，$\mathrm{dim}SO(N) = N(N-1)/2$ 個のパラメータを動かすことによって連続的に単位元につながっている．よって，$O(N)$ と $SO(N)$ は，単位元の近傍の局所的な振る舞いは等しく，したがってリー代数も等しい．$O(N)$ の部分群としての $SO(N)$ を $O(N)$ の**連結成分**という．$SO(N)$ は $O(N)$ の**不変部分群**である．$SO(N)$ と $O(N)$ は大域的な構造が異なっている．

⑧　一般の線形リー群 G は，いくつかの連結成分の和集合である．任意のコンパクト・リー代数は単純リー代数と 1 次元リー代数の直和である．1 次元リー代数に対応するコンパクト・リー代数は，1 次元ユニタリー群 $U(1)$ である．よって，**任意のコンパクトな連続線形リー群は，単純リー群と** $U(1)$ の直積である．

⑨　$U(1)$ の不変部分群を持たない群は，**半単純群**（semi-simple group）と呼ばれ，いくつかの単純群の直積になる．

C.2.1　SU(2)

ゲージ群 G の基本表現の生成子として，次のものが標準的である．

$G = SU(2)$ の場合，生成子 $T^A = \frac{1}{2}\sigma^A \quad (A = 1, 2, 3)$ として，σ^A は Pauli 行列を用いる：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

ここで，σ^3 が対角に選ばれている．生成子は，

$$\left[\frac{\sigma^A}{2}, \frac{\sigma^B}{2}\right] = i\varepsilon^{ABC}\frac{\sigma^C}{2}, \quad \left\{\frac{\sigma^A}{2}, \frac{\sigma^B}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta^{AB}\mathbf{1} \tag{C.13}$$

を満たす．ここで，SU(2) 群の構造定数 ε^{ABC} は 3 階完全反対称テンソルで，$\varepsilon^{123} = 1$ である．$G = SU(2)$ は，$\mathrm{dim}G = 2^2 - 1 = 3$ だから 3 個の 2×2 行列で，$\mathrm{rank}G = 1$ だから，そのうちの 1 つは，対角行列であり，Cartan 部分代数を構成する．

Cartan 部分代数として，$H_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ を選ぶと，随伴表現（付録 C.3 参照）は，

$$\{Ad(H_3)\}^A{}_B = i\epsilon_{3BA} = -i\epsilon_{AB3} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

固有値方程式

$$\{Ad(H_3)\}^A{}_B v^B_\alpha = \alpha v^A_\alpha \ (A = 1, 2, 3) \tag{C.15}$$

において，v_α は固有値 α に対する固有ベクトルである．これを解くと，0 以外の固有値は，$\alpha = \pm 1$ の 2 個で，それに対応する固有ベクトルは，それぞれ，

$$v_\pm = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.16}$$

で与えられる．この固有値 $\alpha = \pm 1$ をルートと呼ぶ．SU(2) のルート空間は 1 次元である．それぞれのルートに対応したリー代数の元は，

$$E_+ = v_+^A T_A = \frac{1}{2}(T_1 + iT_2), \quad E_- = v_-^A T_A = \frac{1}{2}(T_1 - iT_2) = (E_+)^\dagger, \tag{C.17}$$

$\{H_3, E_+, E_-\}$ は，Cartan の標準形をなす．

$$[H_3, E_\pm] = \pm E_\pm, \quad [E_+, E_-] = \frac{1}{2}H_3 \tag{C.18}$$

SU(2) のグルーオン場

$$\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu^A T^A = a_\mu T^3 + \sum_{a=1,2} A_\mu^a T^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{C.19}$$

は，Cartan 分解 (Cartan decomposition)

$$\mathscr{A}_\mu = a_\mu H_1 + V_\mu^* E_+ + V_\mu E_- \tag{C.20}$$

を持つ．ここで，

$$V_\mu = A_\mu^1 + iA_\mu^2, \quad H_1 = T^3, \quad E_\pm = \frac{1}{2}(T^1 \pm iT^2). \tag{C.21}$$

また，$\tilde{E}_\alpha := \sqrt{2}E_\alpha$ を導入し，Cartan 分解として，

$$\mathscr{A}_\mu = a_\mu H_1 + W_\mu^* \tilde{E}_+ + W_\mu \tilde{E}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 & \sqrt{2}{W_\mu}^* \\ \sqrt{2}W_\mu & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{C.22}$$

を採用すると，

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2), \quad H_1 = T^3, \quad \tilde{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 \pm iT^2), \tag{C.23}$$

交換関係は，次のようになる．

$$[H_3, \tilde{E}_\pm] = \pm \tilde{E}_\pm, \quad [\tilde{E}_+, \tilde{E}_-] = H_3 \tag{C.24}$$

SU(2) の Cartan 部分群 U(1) は，次のように書ける．

$$\begin{aligned} e^{i\theta\sigma_3} =& \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(i\theta\sigma_3)^n = \mathbf{1}\cos\theta + i\sigma_3 \sin\theta \\ =& \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \ (\theta = \theta_1 = -\theta_2) \end{aligned} \tag{C.25}$$

これは，確かに行列式が 1 のユニタリー行列である．

C.2.2 SU(3)

$G = SU(3)$ の場合は，$\mathrm{dim}G = 3^2 - 1 = 8$ で $\mathrm{rank}G = 2$ だから 8 個の 3×3 行列が必要で，うち 2 つは対角行列である．生成子 $T^A = \frac{1}{2}\lambda^A$ として，$\lambda^A (A = 1, \cdots, 8)$ は Gell-Mann 行列を用いるのが標準的である．

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{C.28}$$

このうち，λ^3 と λ^8 が対角行列である．交換関係

$$\left[\frac{\lambda^A}{2}, \frac{\lambda^B}{2}\right] = if^{ABC}\frac{\lambda^C}{2} \tag{C.29}$$

を満たす．ここで構造定数 f^{ABC} は，添え字 ABC の入れ換えに関して完全反対称で，この表現では，ゼロでない成分は,

$$\begin{aligned} &f_{123} = 1 \\ &f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = \tfrac{1}{2} \\ &f_{458} = f_{678} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{C.30}$$

で与えられる．また，反交換関係

$$\left\{\frac{\lambda^A}{2}, \frac{\lambda^B}{2}\right\} = \frac{1}{3}\delta^{AB}\mathbf{1} + d_{ABC}\frac{\lambda^C}{2} \tag{C.31}$$

を満たすが，d_{ABC} は添え字 ABC の入れ換えに対して完全対称で，ゼロでないのは,

$$\begin{aligned} &d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\ &d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \tfrac{1}{2} \\ &d_{247} = d_{366} = d_{377} = -\tfrac{1}{2} \\ &d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\tfrac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{C.32}$$

である．

$\mathrm{rank}SU(3) = 2$ であるので，Cartan 部分代数として，H_3, H_8 を選ぶと，随伴表現は,

$$
\{Ad(H_3)\}^A{}_B = if_{3B}{}^A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.33}
$$

$$
\{Ad(H_8)\}^A{}_B = if_{8B}{}^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.34}
$$

固有値方程式は，２つで $(j = 3, 8)$

$$
\{Ad(H_j)\}^A{}_B v^B_\alpha = \alpha_j v^A_\alpha \ (A = 1, 2, \cdots, 8) \tag{C.35}
$$

において，v_{α_j} は固有値 α_j に対する固有ベクトルである．これを解くと，０以外の固有値 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ と，それに対応する８次元の固有ベクトル v^A_α は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha} = (\pm 1, 0) \to v^A_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, \pm i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\
\vec{\alpha} = (\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2) \to v^A_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, 0, 1, \pm i, 0, 0, 0)^T \\
\vec{\alpha} = (\mp 1/2, \pm\sqrt{3}/2) \to v^A_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, 0, 0, 0, 1, \pm i, 0)^T
\end{aligned} \tag{C.36}
$$

で与えられる．$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ がルートで，ルート空間は２次元である．それぞれのルートに対応したリー代数の元は，

$$
E_{\alpha=(\pm 1,0)} = v^A_\alpha T_A = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_1 \pm iT_2), \tag{C.37}
$$

$$
E_{\alpha=(\pm 1/2,\pm\sqrt{3}/2)} = v^A_\alpha T_A = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_4 \pm iT_5), \tag{C.38}
$$

$$
E_{\alpha=(\mp 1/2,\pm\sqrt{3}/2)} = v^A_\alpha T_A = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_6 \pm iT_7), \tag{C.39}
$$

$\{H_1 = T^3, H_2 = T^8, E_{+\alpha}, E_{-\alpha}\}$ は，Cartan の標準形をなす．

$$
\begin{aligned}
[H_j, E_\alpha] =& \alpha_j E_\alpha, \quad ([H_j, E_{-\alpha}] = -\alpha_j E_{-\alpha}), && \text{(C.40)}\\
[E_\alpha, E_\beta^\dagger] =& \alpha^j H_j \delta_{\alpha\beta} && \text{(C.41)}\\
[E_\alpha, E_\beta] =& -\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} E_\gamma^\dagger, && \text{(C.42)}
\end{aligned}
$$

ここで，Cartan 計量は，$\hat{g}^{AA} = 1/3$ であり，$\alpha^k = g^{kk}\alpha_k = \alpha_k/3$ であることに注意．

SU(3) のグルーオン場

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_\mu =& \mathscr{A}_\mu^A T^A = a_\mu T^3 + a'_\mu T^8 + \sum_{a=1,2,4,5,6,7} A_\mu^a T^a && \text{(C.43)}\\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^8 \end{pmatrix} && \text{(C.44)}
\end{aligned}
$$

は，Cartan 分解

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_\mu =& a_\mu H_1 + a'_\mu H_2 + \sum_{a=1}^{3}(W_\mu^{*a}\tilde{E}_a + W_\mu^a \tilde{E}_{-a}) && \text{(C.45)}\\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & \sqrt{2}W_\mu^{1*} & \sqrt{2}W_\mu^{2*} \\ \sqrt{2}W_\mu^1 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_\mu^8 & \sqrt{2}W_\mu^{3*} \\ \sqrt{2}W_\mu^2 & \sqrt{2}W_\mu^3 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_\mu^8 \end{pmatrix} && \text{(C.46)}
\end{aligned}
$$

を持つ．ここで，SU(3) の非対角成分は，3 つのブロックに分解される．$(a, b) = (1, 2), (4, 5), (6, 7)$.

$$
W_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2), \quad W_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^4 + iA_\mu^5), \quad W_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^6 + iA_\mu^7). \tag{C.47}
$$

Cartan 分解の生成子

$$
\begin{aligned}
\vec{H} =& (H_1, H_2) = (T^3, T^8),\\
\tilde{E}_{\pm 1} =& \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 \pm iT^2), \quad \tilde{E}_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^4 \pm iT^5), \quad \tilde{E}_{\pm 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^6 \pm iT^7),
\end{aligned} \tag{C.48}
$$

は，次の関係に従う．ここで，$\tilde{E}_\alpha = \sqrt{3}E_\alpha$ を導入した．

$$
\begin{aligned}
[\vec{H}, \tilde{E}_\alpha] =& \vec{\epsilon}_\alpha \tilde{E}_\alpha, \quad ([\vec{H}, \tilde{E}_{-\alpha}] = -\vec{\epsilon}_\alpha \tilde{E}_{-\alpha}), && \text{(C.49)}\\
[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta^\dagger] =& \vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{H}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Longrightarrow [\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_{-\alpha}] = \vec{\epsilon}_\alpha \cdot \vec{H}_\alpha \equiv \alpha_j H_j, && \text{(C.50)}\\
[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta] =& -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\tilde{E}_\gamma^\dagger, && \text{(C.51)}\\
\mathrm{tr}(E_\alpha^\dagger E_\beta) =& \mathrm{tr}(E_\alpha E_\beta^\dagger) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}, \quad \mathrm{tr}(E_\alpha E_\beta) = \mathrm{tr}(E_\alpha^\dagger E_\beta^\dagger) = 0 && \text{(C.52)}
\end{aligned}
$$

ここで，正ルート (positive root) は

$$\vec{\epsilon}_1 = \alpha^{(1)} = (1,0), \quad \vec{\epsilon}_2 = -\alpha^{(2)} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{\epsilon}_3 = \alpha^{(3)} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{C.53}$$

で与えられ，単純ルート (simple root) は

$$\alpha_1 := \alpha^{(1)}, \quad \alpha_2 := \alpha^{(3)}. \tag{C.54}$$

である．$\sum_{\alpha=1}^{3} \vec{\epsilon}_\alpha = \vec{0}$ に注意．

構造定数 f^{ABC} のうち，Cartan 部分代数の添え字 3 と 8 を含むのは，以下だけである．

$$f_{312} = 1, \quad f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}; \quad f_{845} = f_{867} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{C.55}$$

これに対して，d^{ABC} のうち Cartan 部分代数の添え字 3 と 8 を含むのは，以下だけである．

$$\begin{aligned} &d_{344} = d_{355} = \tfrac{1}{2}, \quad d_{366} = d_{377} = -\tfrac{1}{2}, \quad d_{338} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}; \\ &d_{811} = d_{822} = d_{833} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{844} = d_{855} = d_{866} = d_{877} = -\tfrac{1}{2\sqrt{3}}, \quad d_{888} = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{C.56}$$

d^{ABC} は，添え字 2 つが Cartan 部分代数に属すとき，ゼロにならないのは，3 つ目も Cartan 部分代数に属す場合のみである．よって，j,k,ℓ が Cartan 部分代数に属すとき，

$$d^{jab} \neq 0, \quad d^{jka} = 0 \ (a \neq j,k), \quad d^{ji\ell} \neq 0 \tag{C.57}$$

$$d^{ABC} = 2\mathrm{tr}(\{T^A, T^B\}T^C). \tag{C.58}$$

行列で書くと，

$$d_{3AB} = \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{C.59}$$

$$
d_{8AB} = \left(\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}
\end{array}\right) \tag{C.60}
$$

次のような行列の対角化を考えよう.

$$
M^{ab} = v\delta^{ab} + Y^j f^{jab} \tag{C.61}
$$

これは，３つのブロック対角な形をしており，固有値は６個で，

$$
v \pm i(\vec{\epsilon}_\alpha \cdot Y) = v \pm i(\epsilon^j_\alpha Y^j) \tag{C.62}
$$

行列式は,

$$
\det M = \prod_{\alpha=1}^{3} [v^2 + (\vec{\epsilon}_\alpha \cdot Y)^2] \tag{C.63}
$$

で与えられる.

C.2.3 SU(N)

一般の $SU(N)$ の場合も $\mathrm{dim}SU(N) = N^2 - 1$ で $\mathrm{rank}SU(N) = N - 1$ に注意して同様に構成できる．生成子は，トレースがゼロ $\mathrm{tr}(T^A) = 0$ の $N \times N$ のエルミート行列 T^A で，全部で $(N^2 - 1)$ 個，そのうち $(N - 1)$ 個は対角形で Cartan 部分代数にとることができる．規格化直交条件は,

$$
\mathrm{tr}\left(T^A T^B\right) = \frac{1}{2}\delta^{AB} \tag{C.64}
$$

と決める.

$$
\left[T^A, T^B\right] = if^{ABC}T^C, \quad \left\{T^A, T^B\right\} = \frac{1}{N}\delta^{AB}\mathbf{1} + d_{ABC}T^C \tag{C.65}
$$

$$
\begin{aligned}
T^A T^B =& \frac{1}{2}[T^A, T^B] + \frac{1}{2}\{T^A, T^B\} \\
=& \frac{1}{2N}\delta^{AB}\mathbf{1} + \frac{1}{2}d^{ABC} + \frac{1}{2}if^{ABC}T^C.
\end{aligned} \tag{C.66}
$$

これから,

$$
if^{ABC} = 2\mathrm{tr}([T^A, T^B]T^C), \quad d^{ABC} = 2\mathrm{tr}(\{T^A, T^B\}T^C). \tag{C.67}
$$

$SU(2)$ のときだけ，$d_{ABC} \equiv 0$ となることに注意せよ.

$$if^{AAC} = 0 \ (\text{A について和をとらない}), \tag{C.68}$$

$$d^{AAC} = 0 \ (\text{A について和をとる}). \tag{C.69}$$

後者の関係は，次の事実から出てくる．

G=SU(N) の場合，完全性関係 (completeness relation) は，

$$(T^A)_{ab}(T^A)_{cd} = \frac{1}{2}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{1}{2N}\delta_{ab}\delta_{cd}$$
$$(A = 1, 2, \cdots, N^2 - 1; a, b, c, d = 1, 2, \cdots, N) \tag{C.70}$$

で与えられる．これから，Lie 代数の生成子の自乗の和は単位行列に比例すること，

$$\sum_{A=1}^{d(G)} T^A T^A = C_2(R)\mathbf{1}_R \tag{C.71}$$

がわかる．ここで，比例係数 $C_2(R)$ は表現に依存するが，２次のカシミア不変量 (Casimir invariant) と呼ばれる．G=SU(N) の f：基本表現，a：随伴表現に対して，

$$C_2(f) := C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_2(a) := C_A = N \tag{C.72}$$

となる． また，次の関係がある

$$\mathrm{tr}(T^A T^B) = T(R)\delta_{AB} \tag{C.73}$$

$T(R)$ と $C_2(R)$ の間の関係は，

$$T(R) = \frac{d(R)}{d(G)}C_2(R) \tag{C.74}$$

であり，ここで，$d(R)$ は表現 R の次元で，$d(G)$ は群 G の次元である．

$$d(G) = N^2 - 1, \quad d(f) = N, \quad T(f) = \frac{d(f)}{d(G)}C_2(f) = \frac{1}{2}, \tag{C.75}$$

$$d(a) = N^2 - 1, \quad T(a) = C_2(a) = C_A = N. \tag{C.76}$$

特に，SU(3) の場合は，

$$d(G) = 8, \quad d(f) = 3, \quad T(f) = \frac{1}{2}, \quad C_2(f) = C_F = \frac{4}{3} \tag{C.77}$$

$$d(a) = 8, \quad T(a) = C_2(a) = C_A = 3. \tag{C.78}$$

フィールツ恒等式 (Fierz identity) は，

$$(T^A)_{ab}(T^A)_{cd} = \frac{N^2 - 1}{2N^2}\delta_{ad}\delta_{bc} - \frac{1}{N}(T^A)_{ad}(T^A)_{bc} \tag{C.79}$$

で与えられる．

容易に確かめられる恒等式

$$
\begin{aligned}
[[T^A,T^B],T^C]+[[T^B,T^C],T^A]+[[T^C,T^A],T^B] =&0, \qquad (\text{C}.80)\\
[\{T^A,T^B\},T^C]+[\{T^B,T^C\},T^A]+[\{T^C,T^A\},T^B] =&0, \qquad (\text{C}.81)\\
\{T^A,\{T^B,T^C\}\}-\{T^B,\{T^C,T^A\}\}+[T^C,[T^A,T^B]] =&0, \qquad (\text{C}.82)
\end{aligned}
$$

から，それぞれ，次のような恒等式が得られる．

$$
f^{ABE}f^{ECD}+f^{BCE}f^{EAD}+f^{CAE}f^{EBD}=0, \qquad (\text{C}.83)
$$

$$
d^{ABE}f^{ECD}+d^{BCE}f^{EAD}+d^{CAE}f^{EBD}=0, \qquad (\text{C}.84)
$$

$$
f^{ABE}f^{CDE}=\frac{2}{N}(\delta^{AC}\delta^{BD}-\delta^{AD}\delta^{BC})+d^{ACE}d^{BDE}-d^{ADE}d^{BCE}. \qquad (\text{C}.85)
$$

構造定数に関して，

$$
f^{ACD}f^{BCD}=N\delta^{AB}, \quad f^{ABC}f^{ABC}=N(N^2-1) \qquad (\text{C}.86)
$$

特に，SU(2) に対しては，

$$
\epsilon^{ABC}\epsilon^{DEF}=\begin{vmatrix} \delta^A{}_D & \delta^A{}_E & \delta^A{}_F \\ \delta^B{}_D & \delta^B{}_E & \delta^B{}_F \\ \delta^C{}_D & \delta^C{}_E & \delta^C{}_F \end{vmatrix} \qquad (\text{C}.87)
$$

$$
\epsilon^{ABE}\epsilon^{CDE}=\begin{vmatrix} \delta^A{}_C & \delta^A{}_D \\ \delta^B{}_C & \delta^B{}_D \end{vmatrix}=\delta^{AC}\delta^{BD}-\delta^{AD}\delta^{BC} \qquad (\text{C}.88)
$$

$$
\epsilon^{ACD}\epsilon^{BCD}=2\delta^{AB} \qquad (\text{C}.89)
$$

$$
\epsilon^{ABC}\epsilon^{ABC}=6 \qquad (\text{C}.90)
$$

さらに，恒等式

$$
\begin{aligned}
&[[[T^A,T^B],T^C],T^D]+[[[T^B,T^A],T^D],T^C]\\
&\qquad +[[[T^C,T^D],T^A],T^B]+[[[T^D,T^C],T^B],T^A]=0, \qquad (\text{C}.91)\\
&[[\{T^A,T^B\},T^C],T^D]-[[\{T^A,T^B\},T^D],T^C]\\
&\qquad +[\{[T^C,T^D],T^B\},T^A]+[\{[T^C,T^D],T^A\},T^B]=0, \qquad (\text{C}.92)\\
&[\{\{T^A,T^B\},T^C\},T^D]+[\{\{T^B,T^A\},T^D\},T^C]\\
&\qquad +[\{\{T^C,T^D\},T^A\},T^B]+[\{\{T^D,T^C\},T^B\},T^A]=0. \qquad (\text{C}.93)
\end{aligned}
$$

からは，

$$
\begin{aligned}
&f^{ABE} f^{ECF} f^{FDG} + f^{BAE} f^{EDF} f^{FCG} \\
&\qquad + f^{CDE} f^{EAF} f^{FBG} + f^{DCE} f^{EBF} f^{FAG} = 0, \qquad \text{(C.94a)} \\
&d^{ABE} f^{ECF} f^{FDG} - d^{BAE} f^{EDF} f^{FCG} \\
&\qquad + f^{CDE} d^{EBF} f^{FAG} + f^{CDE} d^{EAF} f^{FBG} = 0, \qquad \text{(C.94b)} \\
&d^{ABE} d^{ECF} f^{FDG} + d^{BAE} d^{EDF} f^{FCG} \\
&\qquad + d^{CDE} d^{EAF} f^{FBG} + d^{DCE} d^{EBF} f^{FAG} = 0. \qquad \text{(C.94c)}
\end{aligned}
$$

が導かれる．さらに，複雑な恒等式も同様に導ける．

トレース（跡, trace）に関して，次のような関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T^A) =& 0, \qquad \text{(C.95)} \\
\mathrm{tr}(T^A T^B) =& \frac{1}{2}\delta^{AB}, \qquad \text{(C.96)} \\
\mathrm{tr}(T^A T^B T^C) =& \frac{1}{4}(if^{ABC} + d^{ABC}), \qquad \text{(C.97)} \\
\mathrm{tr}(T^A T^B T^C T^D) =& \frac{1}{4N}\delta^{AB}\delta^{CD} + \frac{1}{8}(if^{ABE} + d^{ABE})(if^{CDE} + d^{CDE}) \\
=& \frac{1}{4N}(\delta^{AB}\delta^{CD} - \delta^{AC}\delta^{BD} + \delta^{AD}\delta^{BC}) \\
& + \frac{1}{8}(d^{ABE}d^{CDE} - d^{ACE}d^{BDE} + d^{ADE}d^{BCE}) \\
& + \frac{1}{8}i(d^{ABE}f^{CDE} + f^{ABE}d^{CDE}). \qquad \text{(C.98)}
\end{aligned}
$$

最初の式は明らかであり，それ以外は，(C.66) を繰り返し用いることで示される．最後の式の変形には，(C.85) も用いた．

特に，SU(2) では，簡単になる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T^A T^B T^C) =& \frac{1}{4}i\epsilon^{ABC}, \qquad \text{(C.99)} \\
\mathrm{tr}(T^A T^B T^C T^D) =& \frac{1}{8}\delta^{AB}\delta^{CD} - \frac{1}{8}\epsilon^{ABE}\epsilon^{CDE} \\
=& \frac{1}{8}(\delta^{AB}\delta^{CD} - \delta^{AC}\delta^{BD} + \delta^{AD}\delta^{BC}). \qquad \text{(C.100)}
\end{aligned}
$$

これらは，

$$
T^A T^B = \frac{i}{2}\epsilon^{ABD}T^D + \frac{1}{4}\delta^{AB}. \qquad \text{(C.101)}
$$

を繰り返し用いることで示される．

Cartan の標準形

$$
\begin{aligned}
[H_j, H_k] =& 0, \qquad \text{(C.102)} \\
[H_j, E_{\pm\alpha}] =& \pm\alpha_j E_{\pm\alpha} \qquad \text{(C.103)} \\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] =& \alpha^j H_j \ (j = 1, \cdots, r), \qquad \text{(C.104)} \\
[E_\alpha, E_\beta] =& N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \qquad \text{(C.105)}
\end{aligned}
$$

を考える．ここで，

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}, \quad (E_\alpha, E_\beta) = \delta_{\alpha+\beta,0}, \quad (H_j, H_k) = \sum_\alpha \alpha_j \alpha_k = \hat{g}_{jk}. \tag{C.106}$$

さらに，$E_{\pm\alpha}$ を定数倍した $\tilde{E}_{\pm\alpha} := \sqrt{N} E_{\pm\alpha}$ を導入して，

$$[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_{-\alpha}] = \alpha_j H_j \ (j = 1, \cdots, r), \tag{C.107}$$

が成り立つようにする．ここで，$\alpha^j = \alpha_j / N$. 添え字が上付きから下付きに変わったことに注意.

G=SU(N) のグルーオン場 $(A = 1, 2, \cdots, N^2 - 1)$;

$$\mathscr{A}_\mu = \mathscr{A}_\mu^A T^A = \sum_{j=1,2,\cdots,N-1} a_\mu^j H_j + \sum_{a=1,2,\cdots,N^2-N} A_\mu^a T^a \tag{C.108}$$

は，Cartan 分解

$$\mathscr{A}_\mu = \sum_{j=1}^{N-1} a_\mu^j H_j + \sum_{\alpha=1}^{(N^2-N)/2} (W_\mu^{*\alpha} \tilde{E}_\alpha + W_\mu^\alpha \tilde{E}_{-\alpha}) \tag{C.109}$$

を持つ．ここで，生成子は，

$$\begin{aligned}
\vec{H} =& (H_1, H_2, H_3, \cdots, H_{N-1}) = (T^3, T^8, T^{15}, \cdots, T^{N^2-1}), \\
\tilde{E}_{\pm 1} =& \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 \pm i T^2), \quad \tilde{E}_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^4 \pm i T^5), \\
& \cdots, \quad \tilde{E}_{\pm (N^2-N)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^{N^2-3} \pm i T^{N^2-2}),
\end{aligned} \tag{C.110}$$

場は，

$$\begin{aligned}
W_\mu^1 =& \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + i A_\mu^2), \quad W_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^4 + i A_\mu^5), \\
& \cdots, \quad W_\mu^{(N^2-N)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{N^2-3} + i A_\mu^{N^2-2})
\end{aligned} \tag{C.111}$$

のように再定義される．

SU(N) の Cartan 部分群

$$U = \exp\left(-i g \theta^j H_j\right) \tag{C.112}$$

によるグルーオン場のゲージ変換を考えると，

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_\mu{}' =& U \left(\mathscr{A}_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger \\
=& U \left(a_\mu^j H_j + W_\mu^{*\alpha} \tilde{E}_\alpha + W_\mu^\alpha \tilde{E}_{-\alpha} + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^\dagger \\
=& (a_\mu^k + \partial_\mu \theta^k) H_k + e^{-ig\theta^j \alpha_j} W_\mu^{*\alpha} \tilde{E}_\alpha + e^{ig\theta^j \alpha_j} W_\mu^\alpha \tilde{E}_{-\alpha}
\end{aligned} \tag{C.113}$$

変換則は，

$$a_\mu^{k\,\prime} = a_\mu^k + \partial_\mu \theta^k, \quad W_\mu^{\alpha\,\prime} = e^{ig\theta^j \alpha_j} W_\mu^\alpha, \quad W_\mu^{*\alpha\,\prime} = e^{-ig\theta^j \alpha_j} W_\mu^{*\alpha}, \tag{C.114}$$

となることから，$SU(N)$ の最大トーラス部分群 $U(1)^r$ に対応して，$r = N-1$ 種類の対角成分ベクトル場 a_μ^k $(k = 1, \cdots, r)$ はゲージ場として変換し，$(N^2 - N)/2$ 対の非対角ベクトル場 W_μ^α と $W_\mu^{*\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, (N^2-N)/2)$ は，r 種類の電荷 $+\alpha_j$ と $-\alpha_j$ をそれぞれ持つ荷電物質場として振舞うことがわかる．

以下の 3 種類の積を定義する：

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} := \mathcal{A}^A \mathcal{B}^A, \tag{C.115}$$

$$(\mathcal{B} \times \mathcal{C})^A := f^{ABC} \mathcal{B}^B \mathcal{C}^C, \tag{C.116}$$

$$(\mathcal{B} * \mathcal{C})^A := d^{ABC} \mathcal{B}^B \mathcal{C}^C. \tag{C.117}$$

カラー回転，または，大域的ゲージ変換を

$$\delta\Phi(x) = \Phi(x) \times \theta, \quad \text{or} \quad \delta\Phi^A(x) = f^{ABC} \Phi^B(x) \theta^C. \tag{C.118}$$

で定義する．次の量は，カラー回転の下で不変である．

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A}^A \mathcal{B}^A \tag{C.119}$$

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = f^{ABC} \mathcal{A}^A \mathcal{B}^B \mathcal{C}^C \tag{C.120}$$

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} * \mathcal{C}) = d^{ABC} \mathcal{A}^A \mathcal{B}^B \mathcal{C}^C \tag{C.121}$$

C.2.4 SU(4)

SU(4) は，勿論，SU(N) の場合に含まれているので，一般論を正しく理解しておれば，あえて取り上げる必要はないのであるが，SU(3) からの類推で考えた場合に間違えやすい点を若干指摘しておく．rank SU(4)=3 なので，ルート空間は 3 次元空間 (T_3, T_8, T_{15}) になる．ルートベクトルは，自明でないのは，$4^2 - 1 = 15$ 個のうち，次の 12 個である．まず，$T_3 - T_8$ 平面内にあるのは，SU(3) と同じで，

$$\begin{array}{ccc} & (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), & \\ (-1, 0, 0), & & (1, 0, 0), \\ & (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \quad (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), & \end{array} \tag{C.122}$$

T_{15} 方向に向いているものは，

$$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), \qquad (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}),$$
$$(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), \tag{C.123}$$

と，原点の対称点にある

$$(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}),$$
$$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), \qquad (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), \tag{C.124}$$

である．ルートベクトルの長さは全て 1 なので，ルートベクトル間の角度は内積を計算すればすぐにわかるが，60 度だけでなく，90 度の場合もあることに注意したい．どれが，正ルートであるかは，定義によるが，正ルートの個数と単純ルートの個数は定義に依らない．正ルートの取り方は，例えば，

$$(1,0,0), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \quad (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0),$$
$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), \quad (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), \quad (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}) \tag{C.125}$$

である．

C.2.5 U(N)

$U(N) \simeq U(1) \times SU(N)$ であるから，例えば $U(N)$ の生成子は $\frac{1}{2}\sigma^A$ に単位行列に比例した $T_0 = \frac{1}{2}\mathbf{1}$ を付け加えればよい．$U(3)$ の生成子は，$\frac{1}{2}\lambda^A$ に，$T_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{1}$ を付け加えればよい．数係数は，規格直交条件から決められる．

C.2.6 $O(N)$

直交群 (Orthogonal group) は，次の和を不変に保つ変換群である．

$$x_i x_i = \text{invariant}. \tag{C.126}$$

C.2.7 $Sp(M)$

シンプレクティック群 (Symplectic group) は，Grassmann 変数 θ_i に対して，次の和を不変に保つ変換群である．

$$\theta_m C_{mn} \theta_n = \text{invariant}. \tag{C.127}$$

ここで，行列 C は実の反対称行列である．

C.2.8 $Osp(N|M)$

直交シンプレクティック群 (Orthosymplectic group) は，次の和を不変に保つ変換群である．

$$x_i x_i + \theta_m C_{mn} \theta_n = \text{invariant.} \tag{C.128}$$

$$O(N) \times Sp(M) \subset Osp(N|M) \tag{C.129}$$

$Osp(N|M)$ は，群のパラメータが Grassmann 変数であることも許して校正できる supergroup or graded Lie group の一つであり，他に SU(N—M) もある．これに対して，Lie 群はパラメータが実変数であった．

C.3 随伴表現

随伴(ずいはん)**表現**（adjoint representation）とは，表現の次元が dim$G$ で，生成子 T_A の表現行列が

$$(T_A)_B{}^C = i f_{BAC} \equiv [\mathrm{Ad}\,(T_A)]_B{}^C \tag{C.130}$$

で与えられる．これが Lie 代数のひとつの表現であることは，(C.130) で定義される dim$G \times$ dim$G$ の行列が，生成子の交換関係

$$[T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C \tag{C.131}$$

を満たすことから従う*3)．

随伴表現の表現ベクトルのベクトル表示 $\Phi_A(A = 1, 2, \cdots, \mathrm{dim}G)$ は，群 G の変換で，

$$\Phi'_B = \exp\left[i\theta^A \mathrm{Ad}(T_A)\right]_B{}^C \Phi_C \tag{C.134}$$

と変換する．随伴表現の表現ベクトルの別の表示である（行列記法）Φ は

$$(\Phi)_a{}^b = \sum_{A=1}^{\mathrm{dim}G} \Phi^A \, (T_A)_a{}^b \tag{C.135}$$

で与えられる．この場合，行列 Φ は，群 G の変換で

$$\Phi' = U \Phi U^\dagger, \quad U_a{}^b = \left[\exp\left(i\theta^A T_A\right)\right]_a{}^b \tag{C.136}$$

と書ける．ここで U の中の T_A は Φ の定義にある T_A と同じものである．後でアジョイントスカラー場の例を扱う．

---

*3) 任意の行列 T_A に対して成立する Jacobi 恒等式

$$[T_A, [T_B, T_C]] + [T_B, [T_C, T_A]] + [T_C, [T_A, T_B]] = 0 \tag{C.132}$$

に，(C.131) を代入して得られる関係式

$$f_{BCD} f_{ADE} + f_{CAD} f_{BDE} + f_{ABD} f_{CDE} = 0 \tag{C.133}$$

を使う．

問題 C.1　随伴表現のベクトル表示 (C.134) と行列表示 (C.136) とは等価であることを示せ.

ヒント

$$\sum_B \Phi'_B T_B = \sum_B \Phi^B U T_B U^\dagger \tag{C.137}$$

つまり

$$T_B \exp\left[i\theta^A \mathrm{Ad}\,(T_A)\right]_B^{\ C} \Phi_C = \Phi^B U T_B U^\dagger \tag{C.138}$$

を示せばよい．$X = \Phi^B T_B$，$Y = i\theta^A T^A$ として，公式

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y,[Y,X]] + \cdots \tag{C.139}$$

を用いれば示せる.

C.4　SU(3) の直積表現の既約分解

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^* \tag{C.140}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} \tag{C.141}$$

$$\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3} \tag{C.142}$$

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \tag{C.143}$$

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{15} \oplus \mathbf{3} \tag{C.144}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{C.145}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = (\mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3}^* &= \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6} \otimes \mathbf{3}^* \\ &= \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{15}\end{aligned} \tag{C.146}$$

$$\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = (\mathbf{3}^* \oplus \mathbf{15}) \oplus \mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6} \tag{C.147}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* &= (\mathbf{6}^* \otimes \mathbf{3}^*) \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*) \\ &= \mathbf{8}^* \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}\end{aligned} \tag{C.148}$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{15} \tag{C.149}$$

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{15} \oplus \mathbf{15}^* \tag{C.150}$$

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{27} \tag{C.151}$$

付録 D
量子Yang-Mills理論の定式化に関する未解決問題

古典的Yang-Mills理論から出発して，量子化の手続きを実行し，量子的Yang-Mills理論を定式化し，その性質を調べてきた．しかし，実は，Yang-Mills理論の量子版は，これまでの議論では，必ずしも厳密な意味では構成されていないのである．それはどういうことかをこの章で解説するが，これらは，未だに未解決の問題である．

D.1 Gribov 問題

既に第４章で議論したように，ゲージ理論を正しく量子化するにはゲージ固定という操作が必要であった．ここでは，この操作を少し異なる側面から眺めてみて，その問題点を指摘する．

ゲージ場 $\mathscr{A}_\mu^A(x)$ を元とする無限次元の配位空間

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathscr{A}_\mu^A(x) \mid \mu = 0, \cdots, D-1; A = 1, \cdots, \mathrm{dim}G; x \in \mathbb{R}^D \right\} \quad \text{(D.1)}$$

を考える．ここで，A，μ，x は $\mathscr{A}$ の単なる添え字として捉える．ある $\mathscr{A}_\mu^A(x)$ は，$\mathcal{A}$ の中のある１点に対応する．これにゲージ変換 U を施せば，異なるゲージ場 $\mathscr{A}_\mu^{A^U}(x)$ が得られるが，これも $\mathcal{A}$ の中に含まれることには変わりないが，異なる点に対応する．このように，ある点から出発してゲージ変換を積み重ねて（繰り返して）いけば，$\mathcal{A}$ の中にある点を通る軌道が描かれる．これを**ゲージ軌道**（gauge orbit）*1) という．これを各点で繰り返していくと，$\mathcal{A}$ はゲージ軌道で埋め尽くされることがわかる．

物理的に意味がある物理量は，ゲージ変換しても変わらないものであるから，ゲージ軌道上の任意の点はすべて同じ物理を与える．経路（汎関数）積分量子化では，物理的に異なるすべての可能な配位に対する積分 $\mathscr{D}\mathscr{A}$ を行うが，この

*1) ゲージ軌道に沿う運動は，ゲージ変換分しか違わないから，非物理的な運動である．物理的な運動は，ゲージ軌道を横切る**軌跡**（trajectory）として表現できる．

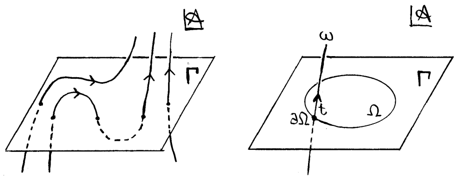

図 D.1　ゲージ場の空間における（左）ゲージ固定超曲面 Γ とゲージ軌道.（右）ゲージ固定超曲面 Γ と（第 1）Gribov 領域 Ω とその境界である Gribov ホライズン $\partial\Omega$

積分を $\mathcal{A}$ 上で行うと，すなわち $\int_{\mathcal{A}} \mathscr{D}\mathscr{A}$，ゲージ変換して得られる非物理的自由度まで含めて積分してしまい，**数えすぎ**（over counting）の問題が起こる．よって，汎関数積分は $\mathcal{A}$ 全体ではなく，ゲージ変換の作用で移り変わる部分 $\mathcal{G}$ で除した商空間 $\mathcal{C} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ 上で行う必要がある[*2)]．

ゲージ固定の操作は，各ゲージ軌道から**代表元**（representative）をひとつ採ってくることを意味する．言い換えると，Yang-Mills 場の汎関数積分は，ゲージ変換で規定される同値関係で選び出される同値類上で定義される．例えば，Landau ゲージ $\partial^\mu \mathscr{A}_\mu = 0$ は，$\mathcal{A}$ の中の原点を通る超平面 $\mathit{\Gamma}$ を表すので，このゲージ固定条件を課すことは，この超平面 $\mathit{\Gamma}$ とゲージ軌道の交わる点を代表元として選び出すことに対応する．一般のゲージ固定条件 $f[\mathscr{A}] = 0$ は，$\mathcal{A}$ の中の超曲面 $\mathit{\Gamma}$ を表す．この $\mathit{\Gamma}$ をゲージ固定超曲面 (gauge fixing hypersurface) という．

一見これですべてうまく行くように思えるが，深く考えると，ここでは，あるゲージ固定条件を採ったとき，それを表すゲージ固定超曲面 $\mathit{\Gamma}$ がすべてのゲージ軌道 $\mathcal{G}$ と交わること（存在），かつ，各ゲージ軌道に対してただ１回のみ交わること（一意性）が暗黙のうちに仮定されていることがわかる．

このゲージ固定の存在と一意性は，本当に保証されているだろうか？図 D.1（左）のような状況が生じたりはしないか？

アーベル型ゲージ理論の場合は問題ない．なぜなら，この場合すべてのゲージ軌道は直線で互いに平行で，例えば $\partial^\mu \mathscr{A}_\mu = 0$ とは垂直に交わる，からである．ところが，非アーベル型ゲージ理論では，上の条件を満たすようなゲージ固定の存在と一意性は保証できない．これは，初めてこの問題を明確に取り上げた Gribov の名にちなんで，現在では**Gribov 問題**（Gribov problem）と呼ばれている[*3)]．

実際，Coulomb 型ゲージや Lorentz 型ゲージを採用すると，代表元は一意

---

*2)　このように，ゲージ変換を**法**（modulo）とする配位空間をゲージ軌道空間という．

*3)　V.N. Gribov，Nucl. Phys. B **139**，1-19（1975）普通，ゲージ固定の一意性の欠如のことを Gribov problem という．ゲージ固定の非一意性は，数学的に厳密に証明できる．ただし，時空をコンパクト化して行う．I. Singer，Commun. Math. Phys. **60**，7（1978）を見よ．

的には決まらない．以下，問題をはっきりさせるため Lorentz 型 Landau ゲージに限る．問題は，ある $\mathscr{A}_\mu$ が Landau ゲージ $\partial^\mu \mathscr{A}_\mu = 0$ を満たしているとき，それを g でゲージ変換した $\mathscr{A}^g_\mu \equiv g\mathscr{A}g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1}$ で Landau ゲージを満たすもの，つまり $\partial^\mu \mathscr{A}^g_\mu = 0$ となるものが複数存在することである．このとき，$\mathscr{A}^g_\mu$ を $\mathscr{A}_\mu$ の**Gribov コピー**（Gribov copy）と呼ぶ．しかも，Gribov コピーは無数にあることが知られている．Coulomb ゲージでも最大可換ゲージでも同様である．

以下，ユークリッド化して考える*4)．ユークリッド空間で FP 演算子

$$M^{AB}[\mathscr{A}](x,y) := -\partial_\mu \mathscr{D}^{AB}_\mu[\mathscr{A}]\delta^{(D)}(x-y) \tag{D.2}$$

を考える．ここで，$\mathscr{D}^{AB}_\mu[\mathscr{A}] \equiv \partial_\mu \delta^{AB} + gf^{ACB}\mathscr{A}^C_\mu(x)$ である．

Landau ゲージ $\partial_\mu \mathscr{A}_\mu = 0$ では，FP 演算子はエルミート演算子である：

$$M[\mathscr{A}] = -\partial \cdot \mathscr{D}[\mathscr{A}] = -\mathscr{D}[\mathscr{A}] \cdot \partial = M^\dagger[\mathscr{A}]. \tag{D.3}$$

よって $M[\mathscr{A}]$ は対角化でき，その固有値問題を解いて求まった固有値を，大小関係で順番付けして $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ を用いると，

$$\mathrm{det} M[\mathscr{A}] = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n[\mathscr{A}] \tag{D.4}$$

と書ける．ここで，λ_n は $\mathscr{A}$ に依存することに注意．

配位空間の原点 $\mathscr{A}_\mu = 0$ では，

$$M[0]^{AB}(x,y) = -\partial_\mu \partial_\mu \delta^{AB}\delta^{(D)}(x-y) \tag{D.5}$$

に帰着し，運動量空間に移ってみると容易にわかるように，FP 演算子は**正定値**（positive definite）である．従って連続性から，$\mathscr{A} = 0$ の近傍では最低固有値 λ_1 は正（$\lambda_1 > 0$）で，その結果 $\mathrm{det}M[\mathscr{A}] > 0$ である．$\lambda_n[\mathscr{A}]$ は $\mathscr{A}$ と共に変化するが，$\mathscr{A}$ がゼロ近傍から離れた場合，最低固有値 λ_1 がゼロになる場合が起こりうる．このとき $\mathrm{det}M[\mathscr{A}] = 0$ となる*5)．こうして，我々は，Γ 上で，**Gribov 領域 (Gribov region)** Ω とその境界である **Gribov 地平線 (Gribov horizon)** $\partial\Omega$ を次のように定義することができる*6)．

---

*4)　Gribov 問題は通常 Euclid 空間に解析接続して考える．この理由のひとつは，Euclid 空間でないと汎関数積分が well-defined にならないこと．もうひとつは，Euclid にしないとアーベル型ゲージ理論でも FP 演算子がゼロ固有値を生じてしまうからである．実際，Euclid 空間では，$\partial_\mu\partial_\mu = (\partial_0)^2 + \nabla^2$ に対して，Minkowski 時空では，$\partial^\mu\partial_\mu = (\partial_0)^2 - \nabla^2$．

*5)　定数の固有ベクトル $\partial_\mu \omega = 0$（大局的ゲージ変換の生成子）に対しては，自明なゼロ固有値を導くので，これを取り除いておく．

*6)　後でわかるように，正確には，第 1 Gribov region，第 1 Gribov horizon と呼ぶべきである：$\Omega^{(1)}$，$\partial\Omega^{(1)}$．
　$\mathrm{det}M[\mathscr{A}] > 0$ のことを，簡単に $M[\mathscr{A}] = -\partial \cdot D[\mathscr{A}] > 0$ と書く．

$$\Omega = \{\mathscr{A} \mid \partial \cdot \mathscr{A} = 0 \;\;\&\;\; \det M[\mathscr{A}] > 0\} \quad \text{Gribov region} \tag{D.6}$$

$$\partial\Omega = \{\mathscr{A} \mid \partial \cdot \mathscr{A} = 0 \;\;\&\;\; \det M[\mathscr{A}] = 0\} \quad \text{Gribov horizon} \tag{D.7}$$

$$\Gamma = \{\mathscr{A} \mid \partial \cdot \mathscr{A} = 0\} \quad \text{gauge}-\text{fixing hypersurface} \tag{D.8}$$

$$\det\left(-\partial \cdot \mathscr{D}[\mathscr{A}]\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \begin{cases} > 0 & \text{for} \;\; \mathscr{A} \in \Omega \\ = 0 & \text{for} \;\; \mathscr{A} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{D.9}$$

Gribov 領域の性質の基本的なことは，以下の通りである：

i) Ω は $\mathscr{A} = 0$ を含む.

ii) Ω はどの方向にも有界である.

iii) Ω は凸集合である.

（証明）

i) $M^{AB}[0] = -\partial^2 \delta^{AB} \delta^{(D)}(x-y)$ より任意の状態 ω に対し，$(\omega, M[0]\omega) > 0$ は明らか.

ii) 分解 $M^{AB}[\mathscr{A}] = M_0^{AB} + M_1^{AB}[\mathscr{A}]$，$M_0^{AB} \equiv -\partial^2 \delta^{AB} \delta^{(D)}(x-y)$，$M_1^{AB}[\mathscr{A}] \equiv g f^{ABC} \mathscr{A}_\mu^C \partial_\mu \delta^{(D)}(x-y)$ を行う．$\mathrm{tr} M_1[\mathscr{A}] = 0$ から，$E[\mathscr{A}] \equiv (\omega, M_1[\mathscr{A}]\omega) < 0$ となる状態 ω が存在する．次に，$M_1[\mathscr{A}]$ は $\mathscr{A}$ について線型，$M_1[\lambda\mathscr{A}] = \lambda M_1[\mathscr{A}]$，であることを用いると，

$$\begin{aligned} (\omega, M[\lambda\mathscr{A}]\omega) &= (\omega, M_0\omega) + \lambda\,(\omega, M_1[\mathscr{A}]\omega) \\ &= (\omega, M_0\omega) + \lambda E[\mathscr{A}] \end{aligned} \tag{D.10}$$

となる．$(\omega, M_0\omega) > 0$，$E[\mathscr{A}] < 0$ より，十分大きいが有限な λ に対して，$(\omega, M[\lambda\mathscr{A}]\omega) < 0$ となる．よって Ω は有界領域である.

iii) $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2 \in \Omega$，$\alpha + \beta = 1$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ に対して $\alpha\mathscr{A}_1 + \beta\mathscr{A}_2 \in \Omega$ を示す．$M_1[\mathscr{A}]$ の線型性から，$M_1[\alpha\mathscr{A}_1 + \beta\mathscr{A}_2] = \alpha M_1[\mathscr{A}_1] + \beta M_1[\mathscr{A}_2]$. よって，

$$\begin{aligned} M[\alpha\mathscr{A}_1 + \beta\mathscr{A}_2] &= M_0 + \alpha M_1[\mathscr{A}_1] + \beta M_1[\mathscr{A}_2] \\ &= \alpha M_0 + \beta M_0 + \alpha M_1[\mathscr{A}_1] + \beta M_1[\mathscr{A}_2] \\ &= \alpha M[\mathscr{A}_1] + \beta M[\mathscr{A}_2] \end{aligned} \tag{D.11}$$

となるが，$M[\mathscr{A}_1] > 0$，$M[\mathscr{A}_2] > 0$ より $M[\alpha\mathscr{A}_1 + \beta\mathscr{A}_2] > 0$ がいえる．（証終）

Gribov は，原点を含む，その近傍の有界凸領域では，FP 演算子が正定値となる領域（第 1 Gribov 領域）があり，その境界でゼロ，その外には負定値となる領域（第 2 Gribov 領域）が取り囲んでおり，さらにその境界にはゼロとなる地平線があり，その外にはまた正定値になる領域が現れる，といった状況が繰り返されることを見出した．またその各々に，第 1 Gribov 領域の Gribov

コピーが存在していることを発見した[*7)].

摂動計算は，結合定数 $g=0$ の近傍で行うので[*8)]，そもそも Gribov 問題に抵触しない．しかし，非摂動的な問題を論じるときには注意する必要がある．質量ギャップや閉じ込めの問題は，まさに非摂動的に取り扱う必要があるので，Gribov 問題を避けて通るわけにはいかない．すべてのゲージ軌道とたった１回だけ交わるようなゲージ固定超平面 Ω を選ぶ（指定する）ことは不可能ということである．ただし，FP 演算子が自明になる（つまり，ゲージ場を含まない）ようなゲージ固定条件を採用した場合（5.10 節参照）は，Gribov 領域は意味を失うが，Gribov コピーが存在しないことを意味しない．

この事実から，Gribov は，Gribov コピーを除いて Yang-Mills 場の汎関数積分を定義するには，$\mathscr{A}$ の汎関数積分を第１ Gribov 領域に制限すること，つまり，Landau ゲージで

$$Z_{\mathrm{YM}}=\int_{\Omega^{(1)}}\mathcal{D}\mathscr{A}\ \delta(\partial\cdot\mathscr{A})\det M[\mathscr{A}]e^{-S_{\mathrm{YM}}[\mathscr{A}]} \tag{D.12}$$

と定義することを提唱した[*9)].

D.2 基本モジュラー領域と非摂動論ゲージ固定

Gribov の言うように第１ Gribov 領域に場の配位を制限すると，Gribov コピーが取り除けるのだろうか．残念ながら，事はそう簡単ではなかったのである．第１ Gribov 領域の中にも Gribov コピーが存在することが証明された[*10)]．Ω の中で本当に Gribov コピーを含まない領域を，**基本モジュラー領域**（fundamental modular region）と呼び，Λ と書く．Λ について知られている性質を列挙すると，(図 D.2 参照)

i) Λ は原点 $\mathscr{A}=0$ を含む.

ii) Λ は Ω の中の有界領域である.

iii) Λ は凸集合である.

---

*7) 最近の review として，R.F. Sobreiro and S.P. Sorella, hep-th/0504095. Gribov ambiguity は，非アーベル型ゲージ場の**位相的性質**（topological property）と深く結びついていることがわかっている.

*8) 結合定数 g を，$\mathscr{A}\to g\mathscr{A}$ として，ゲージ場に吸収すると，$g\ll 1$ は $||g\mathscr{A}||\ll 1$ となり，原点近傍に制限できる.

*9) Gribov は，汎関数積分 $\mathscr{D}\mathscr{A}$ を $\Omega^{(1)}$ に制限することの帰結としてどんな効果が現れるかを，閉じ込めと関連させて論じた.

*10) M.A. Semenov-Tyan-Shanskii and V.A. Franke, Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V.A. Steklov AN SSSR **120**, 159 (1982). English translation: (Plenum Press, New York, 1986) p 999.

G. Dell ’Antonio and D. Zwanziger, Comm. Math. Phys. **138** (1991) 291; Proceedings of the NATO Advanced ResearchWorkshop on Pobabilistic Methods in Qunatum Field Theory and Quantum Gravity, Cargese, August 21-27, 1989, Damgaard and Hueffel (eds.) (Plenum, New York, 1990) , p.107.

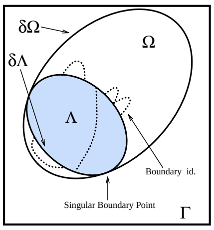

図 D.2　ゲージ固定超曲面 Γ 上の基本モジュラー領域 Λ と Gribov 領域 Ω．点線は，境界上の点を同一視することを意味する．L. Stodolsky, P. van Baal and V.I. Zakharov, [hep-th/0210204], Phys.Lett. B **552**, 214-222 (2003).

iv) Λ の境界 $\partial\Lambda$ 上の点は同一視する必要がある．

v) 境界 $\partial\Lambda$ の点で $\partial\Omega$ と共通部分を持つものが存在する．

等である．この意味では，

$$Z_{\rm YM} = \int_\Lambda \mathscr{D}\mathscr{A}\ \delta(\partial\cdot\mathscr{A}){\rm det}M[\mathscr{A}]e^{-S_{\rm YM}[\mathscr{A}]}$$

と書けば正しいことになる．しかし，Λ はもはや Ω のような単純な条件式によっては表現できない．よって，この表式に基づいて計算を行うことは極めて困難となる．Gribov 問題は言い方を換えると，正しくゲージ固定を行うことが，局所的なゲージ固定条件 $f[\mathscr{A}]=0$ を課すことでは達成できないということである．

実際の格子ゲージ理論に基づいて**数値シミュレーション**（numerical simulation）を実行するときには，次の方法が採用されている．D 次元の Euclid 的 Yang-Mills 理論をゲージ固定するひとつの方法は，$\mathscr{A}(x)$ の局所ゲージ変換 $\mathscr{A}^g(x)$ を全空間で積分した汎関数*11)

$$F_{\mathscr{A}}[g] = \int d^Dx\ {\rm tr}\left[\mathscr{A}^g_\mu(x)\mathscr{A}^g_\mu(x)\right],\quad \mathscr{A}^g_\mu = g^{-1}\mathscr{A}_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g \tag{D.13}$$

を導入し，様々な局所ゲージ変換関数 $g(x)$ を施したときに，この汎関数を最小化するような配位を探し出すことである：$\min_g F_{\mathscr{A}}[g]$．

まず，この方法が，局所的には Landau ゲージを課すことに対応し，$\mathscr{A}$ を第 1 Gribov 領域に制限することは次のようにしてわかる．基本モジュラー領域 Λ は $\mathscr{A}$ の集合で，$F_{\mathscr{A}}(0,\omega)$ が最小値となるもの，すなわち，すべての ω と t に対して $F_{\mathscr{A}}(0,\omega)\le F_{\mathscr{A}}(t,\omega)$. を満たす $\mathscr{A}$ の集合である．一方，Gribov 領域 Ω は，$F_{\mathscr{A}}(0,\omega)$ が極小値となる，すなわち，すべての ω と十分小さな t に対して，$F_{\mathscr{A}}(0,\omega)\le F_{\mathscr{A}}(t,\omega)$. を満たす $\mathscr{A}$ の集合である．

局所ゲージ群 G の 1 パラメータ変換群を $g(t) = e^{t\omega}$ と書いて，$\mathscr{A}^g_\mu =$

*11)　**モース関数**（Morse function）とも言える．

$\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A})$ を $\mathscr{A}_\mu$ の $g(t)$ によるゲージ変換とする．ここで，t は実数，ω はゲージ群 G の Lie 代数の元である．ただし，$\tilde{\mathscr{A}_\mu}(0,\omega,\mathscr{A})=\mathscr{A}_\mu$．このとき，

$$\begin{aligned} F_{\mathscr{A}}(t,\omega) &= \int d^D x \ \mathrm{tr}\left[\left(\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A})\right)^2\right] \\ &= \int d^D x \ \frac{1}{2}\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A})\cdot\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A}) \\ &:= \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A}),\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A})\right). \end{aligned} \tag{D.14}$$

展開 $g(t)=1+t\omega+\frac{1}{2}t^2\omega^2+\cdots$ から，$\tilde{\mathscr{A}_\mu}(t,\omega,\mathscr{A})=\mathscr{A}_\mu+t\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega+\cdots$ を考慮して，$F_{\mathscr{A}}(t,\omega)$ の t 微分を考えると，

$$\begin{aligned} F'_{\mathscr{A}}(t,\omega) &= (\delta_\omega\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\mu)=(\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega,\mathscr{A}_\mu)=(\partial_\mu\omega,\mathscr{A}_\mu)=-(\omega,\partial_\mu\mathscr{A}_\mu) \\ F''_{\mathscr{A}}(t,\omega) &= (\partial_\mu\omega,\delta_\omega\mathscr{A}_\mu)=(\partial_\mu\omega,\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega)=(\omega,-\partial_\mu\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega). \end{aligned} \tag{D.15}$$

よって，$F_{\mathscr{A}}$ が停留値[*12] をとる条件 $F'_{\mathscr{A}}(t,\omega)=0$ から Landau ゲージ条件 $\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0$ をみたすゲージ固定超曲面が選び出され，さらに，FP 演算子 $M[\mathscr{A}]=-\partial\cdot\mathscr{D}[\mathscr{A}]$ が正定値になるという条件を課すと，$F''_{\mathscr{A}}(t,\omega)>0$ となって，ゲージ固定超曲面は，さらに，$F_{\mathscr{A}}$ が極小値となる Gribov 領域に制限されることがわかる．ただし，ここまでの条件では**真の最小値**または**絶対的最小値**（true or absolute minimum）かどうかはわからない．さらに，

$$\begin{aligned} F'''_{\mathscr{A}}(t,\omega) &= (\partial_\mu\omega,g\delta_\omega\mathscr{A}_\mu\times\omega)=(\partial_\mu\omega,g\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega\times\omega) \\ F''''_{\mathscr{A}}(t,\omega) &= \left(\partial_\mu\omega,(g^2\delta_\omega\mathscr{A}_\mu\times\omega)\times\omega\right) \\ &= \left(\partial_\mu\omega,(g^2\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega\times\omega)\times\omega\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\partial_\mu\omega^2,\partial_\mu\omega^2\right)+\left(\omega^2,\omega\cdot\partial_\mu\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega\right). \end{aligned} \tag{D.16}$$

さて，Gribov 領域 $\varOmega$ の内に Gribov コピーがあることを証明しよう．図 D.1（右）参照．$\mathscr{A}$ を Gribov ホライズン $\partial\varOmega$ 上のある点とすると，$\mathscr{A}$ は $\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0$ をみたし，FP 演算子 $-\partial_\mu\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]$ は非負だが，少なくともひとつの非自明な固有ベクトル ω_0 が存在して $\partial_\mu\mathscr{D}_\mu[\mathscr{A}]\omega_0=0$ をみたす．一般に，$\partial\varOmega$ 上の $\mathscr{A}$ に対して，$F_{\mathscr{A}}(0,\omega)$ は $\mathscr{A}$ を通るゲージ軌道上で極小値をとらない．なぜなら，$F'_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)=0=F''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)$ ではあるが，一般には，$F'''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)\neq 0$ なので，

$$\begin{aligned} & F_{\mathscr{A}}(t,\omega_0)-F_{\mathscr{A}}(0,\omega_0) \\ &= tF'_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)+\frac{1}{2}t^2F''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)+\frac{1}{3!}t^3F'''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)+O(t^4) \\ &= \frac{1}{3!}t^3F'''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)+O(t^4) \end{aligned} \tag{D.17}$$

*12）　極値，すなわち，極小値 (local minimum)，又は極大値 (local maximum) を含む．

は，3次曲線であり $t=0$ で符号を変え，極小値を取らないからである*13)．(それゆえ，ゲージ固定によって選び出される代表元としては，$\partial\Omega$ 上の $\mathscr{A}$ は採用できない.) 次に，Gribov ホライズンの近傍で Gribov 領域の内部の点を考えると，$F'_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)=0$ だが，連続性によって，$F''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)$ は小さいが $F''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)>0$ であるので，これから Gribov 領域 Ω の内部の点は，たとえそれらが極小値になるとしても，絶対的最小値ではありえない．これらの点は Gribov コピーである．以上より，Λ と Ω は一致しない*14)．

格子ゲージ理論の数値シミュレーションにおいてゲージ固定を行うには，汎関数 $F_{\mathscr{A}}[g]$ を，Lie 代数の元 $\mathscr{A}_\mu$ ではなく Lie 群の元 $U_\mu(x)$（リンク変数）で書き直したものを用いて，格子上のゲージ変換で最小にするような配位を抽出し，それを用いて汎関数積分を実行する．これが文字通り実行されれば，Gribov コピーを含まない配位が原理的には得られるはずである．

D.3 Neuberger's 駄目定理と格子上の BRST 対称性

格子ゲージ理論は，コンパクトなゲージ群の元であるリンク変数 $U_{x,\mu}$ を用いた，ゲージ理論の最も重要な概念であるゲージ不変性を常に保った定式化であり，ゲージ固定を必要としないという点で優れている．しかし，格子ゲージ理論を連続のゲージ理論の正則化法と認める限り，いずれは連続極限で通常のゲージポテンシャル $\mathscr{A}_\mu$ による記述に移行すると考えられ*15)，そこではどうしてもゲージ固定が必要になってくる．実際，格子ゲージ理論の弱結合展開 (weak coupling expansion) では，ゲージ固定して伝播関数や頂点関数を求める*16)．とすると，連続理論との対応で，BRST の手続きに従って非摂動的に格子ゲージ理論をゲージ固定することが望まれる．しかし，BRST の手続きは，格子ゲージ理論において旨く定義できないという予想外の結果が存在する．

任意のゲージ不変な演算子をリンク変数の関数として $\mathscr{O}[U]$ と書くと，その期待値は

$$\langle\mathscr{O}\rangle = Z^{-1}\int \mathscr{D}U\ e^{-S_{\rm inv}[U]}\mathscr{O}[U]\quad ,Z:=\int \mathscr{D}U\ e^{-S_{\rm inv}[U]} \tag{D.18}$$

で与えられる．ここで $S_{\rm inv}[U]$ はゲージ不変なユークリッド作用であり，$\mathscr{D}U$ は

*13)　$F''''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)=\frac{3}{4}\left(\partial_\mu\omega_0^2,\partial_\mu\omega_0^2\right)>0$ であるから，もしたまたま $F'''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)=0$ のときは極小値になり得る．$F''''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)$ が大きく，$F'''_{\mathscr{A}}(0,\omega_0)$ が小さいならば，$\mathscr{A}$ の近くに極小値があり，それがゲージ軌道上で絶対的最小値になり得る．

*14)　有限体積の Yang-Mills 理論から，出発して，熱力学的極限（無限体積極限）をとれば，Gribov 領域 $\mathit{\Omega}$ と基本モジュラー領域 $\mathit{\Lambda}$ の区別はなくなるという主張もある．D. Zwanziger, [hep-ph/0303028], Phys. Rev. D **69**, 016002 (2004).

*15)　そう考えない立場もあり得るが.

*16)　格子ゲージ理論の教科書，例えば，H.J. Rothe, Lattice Gauge Theories, An Introduction, 3rd ed. (World Scientific, 2005). I. Montvay and G. Münster, Quantum Fields on a Lattice (Cambridge Univ. Press, 1994).

すべてのリンクにわたるゲージ不変な**積分測度**（measure）を意味する．BRST 定式化では，$f[U]=0$ をゲージ固定条件とすると期待値は，

$$\begin{aligned}
\langle\mathscr{O}\rangle &:= \tilde{Z}_{\mathrm{B}}^{-1}\int\mathscr{D}\mu\ \exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2+\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right\}\mathscr{O}[U] \\
\tilde{Z}_{\mathrm{B}} &:= \int\mathscr{D}\mu\ \exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2+\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right\} \\
\mathscr{D}\mu &:= \mathscr{D}U\mathscr{D}\mathscr{N}\mathscr{D}C\mathscr{D}\bar{C}
\end{aligned}\tag{D.19}$$

となると考えられる．ここで，C，$\bar{C}$ は Euclid 空間上のグラスマン数のゴーストと反ゴースト変数，$\mathscr{N}$ は実数の補助場である．BRST 変換 $\boldsymbol{\delta}$ は，nilpotent（$\boldsymbol{\delta}^2\equiv 0$）でリンク変数 U に対して無限小ゲージ変換として作用して，C，$\bar{C}$，$\mathscr{N}$ に対しては（連続変数の場合と同様に），

$$\boldsymbol{\delta}\bar{C}=i\mathscr{N}\ ,\ \boldsymbol{\delta}\mathscr{N}=0\ ,\ \boldsymbol{\delta}C=iCC \tag{D.20}$$

のように作用すると仮定する*17)．積分測度 $\mathscr{D}\mu$ と被積分関数である全作用

$$S_{\mathrm{tot}}[U,C,\bar{C},\mathscr{N}]=S_{\mathrm{inv}}[U]+\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2-\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f \tag{D.22}$$

は，BRST 不変である．

ここで，次の量を定義しよう：

$$F_{\mathscr{O}}(t):=\int\mathscr{D}\mu\ \exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2+t\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right\}\mathscr{O}[U]. \tag{D.23}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F_{\mathscr{O}}(t) \\
&= \int\mathscr{D}\mu\ \left[\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right]\exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2+t\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right\}\mathscr{O}[U] \\
&= \int\mathscr{D}\mu\ \boldsymbol{\delta}\left[\left(\int\bar{C}f\right)\exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2+t\boldsymbol{\delta}\int\bar{C}f\right\}\mathscr{O}[U]\right] \\
&= \langle 0|\{iQ_B,[\cdots]\}|0\rangle = 0
\end{aligned}\tag{D.24}$$

となる.（全 BRST 変分の積分は恒等的にゼロである.）他方，$t=0$ のとき被積分関数はゴーストや反ゴースト場を含まないので，

$$\begin{aligned}
F_{\mathscr{O}}(0) &= \int\mathscr{D}\mu\ \exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2\right\}\mathscr{O}[U] \\
&= \int\mathscr{D}U\int\mathscr{D}\mathscr{N}\ \exp\left\{-S_{\mathrm{inv}}[U]-\frac{\alpha}{2}\int\mathscr{N}^2\right\}\mathscr{O}[U]\int\mathscr{D}C\mathscr{D}\bar{C} \\
&= 0.
\end{aligned}\tag{D.25}$$

---

*17) リンク変数 $U_{x,\mu}$ の BRST 変換の具体形は定理の証明には必要ないが，BRST 変換は無限小ゲージ変換 $U_{x,\mu}\to g_xU_{x,\mu}g_{x+\mu}^{\dagger}=e^{i\theta_x}U_{x,\mu}e^{-i\theta_{x+\mu}}=U_{x,\mu}+i\theta_xU_{x,\mu}-iU_{x,\mu}\theta_{x+\mu}+O(\theta^2)$ のパラメータ θ_x を，ゴースト場 C_x で置き換えたものであるから，

$$\boldsymbol{\delta}U_{x,\mu}=-i(U_{x,\mu}C_{x+\mu}-C_xU_{x,\mu}) \tag{D.21}$$

のように決まる．

ここで，グラスマン変数の積分公式*18) $\int \mathscr{D}C\mathscr{D}\bar{C} = 0$ を用いた．よって，$\frac{d}{dt}F_{\mathscr{O}}(t) = 0$ かつ $F_{\mathscr{O}}(0) = 0$ より，$F_{\mathscr{O}}(1) = 0$ がいえる．同様にして，分配関数 $\tilde{Z}_{\mathrm{B}} \equiv F_{\mathbf{1}}(1) = 0$ もいえる．以上より，

$$\langle \mathscr{O} \rangle = \frac{F_{\mathscr{O}}(1)}{F_{\mathbf{1}}(1)} = \frac{0}{0}. \tag{D.26}$$

つまり，

定理 7 格子ゲージ理論においてBRST形式が存在すると仮定すると，分配関数はゼロになりゲージ不変な演算子 $\mathscr{O}$ の期待値 $\langle \mathscr{O} \rangle$ は不定形になってしまう．あるいは，格子ゲージ理論において BRST 変換は定義できず，通常の BRST の手続きによってゲージ固定できない．

これを，最初に指摘した人にちなんで**Neuberger の駄目（ダメ）定理**（no-go theorem）という*19)．この議論で，$F_{\mathscr{O}}(t)$ を t で微分するところで微分と積分の順序を交換する必要があるが，コンパクト群の体積は有限であるから，有限（体積の）格子を考えると汎関数積分は有限次元の積分であり，正当化できる．ただし，無限体積極限との交換可能性は自明ではない．

この原因は何であろうか．連続の理論では，ゲージ固定があるゲージ固定条件によって成されている限りは，BRST 形式は何も問題を起こさない．しかし既に議論したように，一般には Gribov コピーの存在のために，ある与えられたゲージ固定条件によって，各ゲージ軌道からひとつだけ代表元を選び出すことは実行できていない．これが摂動論に限られていればBRST形式は問題ないが（BRST 対称性は摂動の任意のオーダーで保持される），非摂動論的問題に対しては適切ではないと考えられる理由である．

格子ゲージ理論は，元々ゲージ固定を必要としない非摂動的定式化であり，ゲージ変数の取る範囲をどこかに制限する必要はなかった．とすると，Faddeev-Popov 行列式の重みが，各 Gribov 領域から交代的に汎関数積分に効くので（隣り合う Gribov 領域では FP 行列式の符号が反転することを思い出そう），ゼロになると解釈できる．つまり，Neuberger の駄目定理，つまり格子ゲージ理論において BRST 対称性を定義する問題（あるいはもっと一般的に BRST 対称性を非摂動的レベルに乗せる問題*20)）と，連続理論における Gribov 問題とは密接に関係していると考えられる．

この問題に対してこれまでにいくつかの提案があり，うまくいく例も知られているが，一般的に通用する解決法はこれまでのところ知られていない．何らかの**逃げ道**（loophole）があるかもしれない．最近，ひとつの試みとして，**同**

*18） 付録 A 参照.

*19） H. Neuberger, Phys. Lett. B183, 337-340（1987）．ここでの説明は，M. Testa, Phys. Lett. B429, 349-353（1998）[hep-let/9803025] に従った.

*20） BRST 対称性を非摂動的に定義しようとする試みもある．例えば，C. Becchi and C. Imbimbo, [hep-th/9510003], Nucl.Phys. B**462**, 571-599 (1996). C. Becchi, hep-th/9607181.

変 (equi-variant)BRST 変換を用いる方法が提唱されている．これは，ゴースト場の自己相互作用項が出現して，ゴーストの積分がゼロでなくなることを用いる*21)．その他の試みもある*22)．

演習問題

4.1　$F''''_{\mathscr{A}}(t,\omega)$ が（D.16）となることを示せ．

4.2　軸性ゲージ固定条件と Fock–Schwinger ゲージ固定条件を採用したときの，ゲージ固定項と FP ゴースト項を求めよ．特に，$\alpha = 0$ のときの FP 演算子を求めよ．

4.3　Fock–Schwinger ゲージ固定条件で成り立つ関係式 (5.141) を示せ．

4.4　$G = SU(2)$ の場合に，最大可換ゲージ固定条件を採用したときの，ゲージ固定項と FP ゴースト項を求めよ．この場合に，Gribov ホランズンが存在することを示せ．

---

*21）M. Golterman and Y. Shamir, [hep-lat/0404011], Phys. Rev. D **70**, 094506 (2005). M. Golterman and L. Zimmerman, [hep-lat/0504023], Phys.Rev. D **71**, 117502, (2005).

*22）A.C. Kalloniatis, L. von Smekal and A.G. Williams, [hep-lat/0501016], Phys. Lett. B **609**, 424–429 (2005).

付録 E
漸近場とカラーの閉じ込め

E.1 漸近場と LSZ 漸近条件

粒子の散乱実験を考えると，無限の過去 $x_0 \to -\infty$ や無限の未来 $x_0 \to +\infty$ には，あらゆる粒子はお互いに遠く離れていってしまって他の粒子との相互作用の効果がほとんど無視できて，場 $\phi(x)$ は自由場のように振舞う場 $\phi^{\rm in}$, $\phi^{\rm out}$ として記述できると考えられる．この $\phi^{\rm in}, \phi^{\rm out}$ を**漸近場**(asymptotic field) という．

まず，Heisenberg 場 $\phi(x)$ が，Klein–Gordon の運動方程式

$$(\Box + \mu^2)\phi(x) = J(x) \tag{E.1}$$

に従っている場合を考えよう．源 $J(x)$ が既知であるとすると，解は，Green 関数 $\Delta_X(x;\mu^2)$ を用いて，形式的に，

$$\phi(x) = \tilde{\phi}_{\rm as}(x) + \int d^D y \Delta_X(x-y;\mu^2)J(y) \tag{E.2}$$

と書ける．このとき，Green 関数の定義 $(\Box + \mu^2)\Delta_X(x-y;\mu^2) = \delta^D(x-y)$ より，$\tilde{\phi}_{{\rm as}(x)}$ は，Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + \mu^2)\tilde{\phi}_{\rm as}(x) = 0 \tag{E.3}$$

を満たしている．この解が，どのような境界条件に対応するかは，Green 関数の選び方と $\tilde{\phi}_{\rm as}$ の採り方に依存して決まる．実際，Green 関数 Δ_X として，遅延 (retarded)Green 関数 $\Delta_{\rm R}$ と先行 (advanced)Green 関数 $\Delta_{\rm A}$

$$\Delta_{\rm R}(x-y;\mu^2) \equiv -\theta(x^0-y^0)\Delta(x-y;\mu^2) \tag{E.4}$$

$$\Delta_{\rm A}(x-y;\mu^2) \equiv \theta(y^0-x^0)\Delta(x-y;\mu^2) \tag{E.5}$$

を採用すると，$y^0 > x^0$ で $\Delta_{\rm R}(x-y;\mu^2) = 0$，$x^0 > y^0$ で $\Delta_{\rm A}(x-y:\mu^2) = 0$ から，$x_0 \to \mp\infty$ で，y 積分項はゼロになるので，漸近的に，

$$\phi(x) \to \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{in}}(x) \quad x_0 \to -\infty \tag{E.6}$$

$$\phi(x) \to \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{out}}(x) \quad x_0 \to +\infty \tag{E.7}$$

となり，$\phi^{\mathrm{as}} = \left\{\phi^{\mathrm{in}}, \phi^{\mathrm{out}}\right\}$ は，自由場の方程式

$$(\Box + \mu^2)\phi^{\mathrm{as}}(x) = 0, \quad \mathrm{as} = \mathrm{in} \quad \mathrm{or} \quad \mathrm{out} \tag{E.8}$$

に従う．このとき，

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{in}}(x) + \int d^D y \Delta_{\mathrm{R}}(x-y;\mu^2)J(y) \\ &= \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{out}}(x) + \int d^D y \Delta_{\mathrm{A}}(x-y;\mu^2)J(y)\end{aligned} \tag{E.9}$$

を**Yang-Feldman(ヤン・フェルドマン) の方程式**という．但し，$x_0 \to \pm\infty$ でも，粒子の自自分自身との相互作用の効果が残るので，それを $\sqrt{Z}$ で表す．Z は**くりこみ定数 (くりこみ因子)**(renormalization constant, or renormalization factor) と呼ばれる．ϕ^{as} を**漸近場**，$\tilde{\phi}^{\mathrm{as}} = \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{as}}$ を**くりこまれた漸近場**という．

一般の場合には，場 ϕ とその漸近場 ϕ^{as} の間には，任意の状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ に対し，

$$\langle\beta| \left[\phi(x) - \sqrt{Z}\phi^{\mathrm{as}}(x)\right] |\alpha\rangle \to 0 \quad (x_0 \to \mp\infty) \tag{E.10}$$

が成立すると考えられる．これを，Lehmann-Symanzik-Zimmermann の漸近条件 (**LSZ の漸近条件**) と呼ぶ*1)．このような期待値に関する極限は，**弱極限**(weak limit) と呼ばれる．これに対し，演算子自身の極限は，強極限と呼ぶ場合がある．ただし，場 $\phi(x)$ の積や時間微分の弱極限は，一般には $\phi(x)$ の弱極限 $\sqrt{Z}\phi^{\mathrm{as}}(x)$ の積や時間微分とは一致しない（言い換えると，弱極限の操作と積や時間微分の操作は交換しない）ことに注意したい．

E.2 保存電荷の漸近場による表現

定理 8 Heisenberg 場 ϕ_ℓ の保存電荷 Q による変換

$$[iQ, \phi_\ell(x)]_\mp = \delta\phi_\ell(x) \tag{E.11}$$

は，一般に場 ϕ_ℓ に関して非線形な多項式となる．しかし，Heisenberg 場 ϕ_ℓ は，漸近場 ϕ_ℓ^{as} を持ち，$\phi_\ell(x) \xrightarrow[x_0\to\pm\infty]{} \tilde{\phi}_\ell^{\mathrm{as}}(x)$，かつ，漸近場 ϕ_ℓ^{as} が完全系をなすと仮定する (**漸近的完全性の仮定**) と，Q が漸近場 ϕ_ℓ^{as} の上に引き起こす変換は必ず線形になる．

$$\left[iQ, \tilde{\phi}_\ell^{\mathrm{as}}(x)\right]_\mp = \sum_j (R_\ell{}^j \tilde{\phi}_j^{\mathrm{as}})(x) \left(:= \sum_j \int d^D y R_\ell{}^j(x-y)\tilde{\phi}_j^{\mathrm{as}}(y)\right)$$

*1) H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, Nuovo Cimento **1**, 205 (1955). **6**, 319 (1957).

(E.12)

ここで，比例係数行列 $R_{\ell j}$ は，有限個の微分演算子 ∂_μ を含んでいてもよい．実際 $R_\ell{}^j$ の核 (kernel)$R_\ell{}^j(x-y)$ は，

$$\begin{aligned} R_\ell{}^j(x-y) &= \sum_k i(\Box_y + m_R^2)\langle 0|T\delta\phi_\ell(x)\phi_k(y)|0\rangle(\eta^{-1})^{kj}\Big|_{\text{on-shell}} \\ &= \sum_k \int d^D z i(\Box_z + m_R^2)\langle 0|T\delta\phi_\ell(x)\phi_k(z)|0\rangle(\eta^{-1})^{kj}\delta^D(z-y)\Big|_{\text{on-shell}} \\ &= \sum_k \int d^D z \langle 0|T\delta\phi_\ell(x)\phi_k(z)|0\rangle\langle 0|T\phi_k(z)\phi_j(y)|0\rangle^{-1}\Big|_{\text{on-shell}} \end{aligned} \tag{E.13}$$

で与えられる．但し $\eta_{\ell k}$ は，漸近場の D 次元 (反) 交換関係

$$\left[\tilde{\phi}_\ell^{\text{as}}(x), \tilde{\phi}_k^{\text{as}}(y)\right\} = i\eta_{\ell k}\Delta(x-y, m_\ell^2) \tag{E.14}$$

からきまる計量で，同じ質量の漸近場間でのみ 0 でないので，$m_\ell\eta_{\ell k} = \eta_{\ell k}m_k$ を満たす．記号 $[\cdot,\cdot\}$ は，漸近場 $\tilde{\phi}_\ell^{\text{as}}, \tilde{\phi}_k^{\text{as}}$ が共に Fermi 統計のときのみ反交換関係を，それ以外は，交換関係を表すとする．右辺の $\Delta(x-y, m^2)$ は不変デルタ関数である．

証明には，スペクトル表示を用いて，漸近場の 2 点関数は，Heisenberg 場の 2 点関数の 1 粒子 pole 部分で与えられることから

$$\begin{aligned} &\text{F.T.}\langle 0|T\phi_\ell(x)\phi_k(y)|0\rangle|_{\text{離散的 pole 部分}} \\ &= \text{F.T.}\langle 0|T\tilde{\phi}_\ell^{\text{as}}(x)\tilde{\phi}_k^{\text{as}}(y)|0\rangle = \frac{1}{i}\frac{\eta_{\ell k}}{m_\ell^2 - p^2} \end{aligned} \tag{E.15}$$

となることを用いる[*2)]．この定理は，言い換えると，一般には，$\delta\phi_\ell(x)$ が Heisenberg 場の 2 次以上になるので，保存電荷 Q を Heisenberg 場で表すと場の 3 次以上の項を含むが，**保存電荷 Q を漸近場で表すと必ず 2 次形式 (quadratic form) または双一次形式 (bi-linear) の形に書ける**ことを示している．

E.3 BRS 電荷の漸近場による表現：摂動論

Yang–Mills 理論において，Lorentz 型ゲージ固定で Feynman ゲージ $\alpha = 1$ を採用した場合には，漸近場 $\mathscr{A}_\mu^{\text{as}}, \mathscr{N}^{\text{as}}, C^{\text{as}}, \bar{C}^{\text{as}}$ の 4 次元交換関係[*3)]

*2) 証明は省略する．証明に興味のある読者は，九後汰一郎，ゲージ場の量子論 I (培風館, 1989) 5.8 節を参照せよ．

*3) ここで，D は，零質量の不変デルタ関数である，$D(x) := \Delta(x, m^2 = 0)$．

$$\left[\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}A}(x), \mathscr{A}_\nu^{\mathrm{as}B}(y)\right] = -i\delta^{AB} g_{\mu\nu} D(x-y) \tag{E.16a}$$

$$\left[\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}A}(x), \mathscr{N}^{\mathrm{as}B}(y)\right] = \left[\mathscr{N}^{\mathrm{as}A}(x), \mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}B}(y)\right] = -i\delta^{AB}\partial_\mu D(x-y) \tag{E.16b}$$

$$\left[\mathscr{N}^{\mathrm{as}A}(x), \mathscr{N}^{\mathrm{as}B}(y)\right] = 0 \tag{E.16c}$$

$$\left\{C^{\mathrm{as}A}(x), \bar{C}^{\mathrm{as}B}(y)\right\} = -\delta^{AB} D(x-y) = \delta^{AB} D(y-x) \tag{E.16d}$$

から漸近場 $\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}, \mathscr{N}^{\mathrm{as}}, C^{\mathrm{as}}, \bar{C}^{\mathrm{as}}$ に対する計量 $\eta_{k\ell}$ は次のように求められる．

$$\eta_{k\ell} = \begin{array}{c|cccc} & \mathscr{A}_\nu^B & \mathscr{N}^B & C^B & \bar{C}^B \\ \hline \mathscr{A}_\mu^A & -g_{\mu\nu} & -\partial_\mu & 0 & 0 \\ \mathscr{N}^A & -\partial_\nu & 0 & 0 & 0 \\ C^A & 0 & 0 & 0 & i \\ \bar{C}^A & 0 & 0 & -i & 0 \end{array} \times \delta^{AB} \tag{E.17}$$

計量の逆は,

$$(\eta^{-1})^{k\ell} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^\nu}{\partial^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^\mu}{\partial^2} & \frac{1}{\partial_\mu} g_{\mu\nu} \frac{1}{\partial_\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \times \delta^{AB} \tag{E.18}$$

で与えられる．

BRS 電荷 Q_B が漸近場 $\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}, C^{\mathrm{as}}, \bar{C}^{\mathrm{as}}, \mathscr{N}^{\mathrm{as}}$ と $\psi^{\mathrm{as}}, \bar{\psi}^{\mathrm{as}}$ に作用して引き起こす BRS 変換の変換則を求めよう．このためには，BRST 変換式の両辺の漸近的極限，すなわち離散的 pole 部分を調べればよい．しかし，これを一般的に行うのは難しいので，ここでは，まず，摂動論の枠内で考えることにする．形式的摂動論での漸近場は，Lorentz 型ゲージでは,

$$\begin{array}{lcl} (\psi(x), \bar{\psi}(x)) & \rightarrow & Z_2^{1/2}(\psi^{\mathrm{as}}(x), \bar{\psi}^{\mathrm{as}}(x)) \\ \mathscr{A}_\mu(x) & \rightarrow & Z_3^{1/2}\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}(x) \\ (C(x), \bar{C}(x)) & \rightarrow & \tilde{Z}_3^{1/2}(C^{\mathrm{as}}(x), \bar{C}^{\mathrm{as}}(x)) \\ \mathscr{N}(x) & \rightarrow & Z_3^{-1/2}\mathscr{N}^{\mathrm{as}}(x) \end{array} \tag{E.19}$$

となる．ここで $Z_2, Z_3, \tilde{Z}_3$ はくりこみ定数で（4.10 節参照）,

$$Z_3 = F(p^2 = 0), \quad \tilde{Z}_3 = G(p^2 = 0), \quad Z_2 = A^{-1}(p^2 = 0) \tag{E.20}$$

で定義される．ここで，NL 場 $\mathscr{N}^A(x)$ のくりこみ定数 $Z_{\mathscr{N}}^{1/2}$ が，ゲージ場 $\mathscr{A}_\mu^A(x)$ のそれ $Z_3^{1/2}$ の逆数 $Z_3^{-1/2}$ になることは，ST 恒等式 (5.114) から従う．これから Heisenberg 場 $\mathscr{N}$ の運動方程式 $\partial^\mu\mathscr{A}_\mu + \alpha\mathscr{N} = 0$ が，くりこまれたゲージパラメータ $\alpha_r = Z_3^{-1}\alpha$ を用いて，くりこまれた漸近場で書いても同じ形, $\partial^\mu\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}} + \alpha_r\mathscr{N}^{\mathrm{as}} = 0$ となる．上の場合は，くりこまれた Feynman ゲージ

$\alpha_r = 1$ を採れば良い．

初めに，$[iQ_B, C^{\mathrm{as}}(x)]_+$ を求めるには，まず

$$\langle 0|T\boldsymbol{\delta}C(x)\Phi_k(y)|0\rangle = -\frac{g}{2}\langle 0|T(C(x)\times C(x))\Phi_k(y)|0\rangle \tag{E.21}$$

を計算する必要があるが，$(C\times C)$ はゴースト数 $+2$ を持つので，真空がゴースト数を保存する限り[*4] Φ としてゴースト数 -2 の (複合) 場 (例えば $\bar{C}\times\bar{C}$) をとらない限り右辺はゼロである．そのような漸近場を実現するような結合状態は，少なくとも摂動展開の任意の有限次数においては現れないので係数行列はゼロである．よって

$$\left[iQ_B, C^{\mathrm{as}A}(x)\right]_+ = 0 \tag{E.22}$$

次に，$\left[iQ_B, \mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}(x)\right]_-$ は，$\mathscr{D}_\mu C$ が Lorentz ベクトルで，ゴースト数 $+1$ を持つことを考えると，

$$\langle 0|T\boldsymbol{\delta}\mathscr{A}_\mu(x)\Phi_k(y)|0\rangle = \langle 0|T\mathscr{D}_\mu C(x)\Phi_k(y)|0\rangle \tag{E.23}$$

でゼロにならないのは，$\Phi_k(y)$ としてゴースト数 -1 の場をとった場合のみで，摂動論の範囲では零質量スカラーの $\bar{C}(y)$ しかない．この場合，

$$\left[iQ_B, Z_3^{1/2}\mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}A}(x)\right]_+ = (R_\mu^{AB}(\partial)C^{\mathrm{as}B})(x), \tag{E.24}$$

$$\begin{aligned} R_\mu^{AB}(\partial) &= \Box_y\langle 0|T(\mathscr{D}_\mu C)^A(x)\bar{C}^C(y)|0\rangle(\eta^{-1})^{\bar{C}^C C^B} \\ &= \Box_y\langle 0|T(\partial_\mu^x C^A(x)\bar{C}^C(y) + g(\mathscr{A}_\mu(x)\times C(x))^A\bar{C}^C(y))|0\rangle(\eta^{-1})^{\bar{C}^C C^B} \end{aligned} \tag{E.25}$$

ST 恒等式 (5.114) から $\bar{C}$ のくりこみ定数が $\tilde{Z}_3^{1/2}$ ならば，$(\mathscr{D}_\mu C)$ のくりこみ定数は $\tilde{Z}_3^{-1/2}$ であることが分かる．よって，係数行列は，(E.18) より，

$$R_\mu^{AB}(\partial) = \tilde{Z}_3^{-1/2}\partial_\mu\delta^{AB} \tag{E.26}$$

となる．従って[*5]，

$$\left[iQ_B, \mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}(x)\right]_- = \left(Z_3\tilde{Z}_3\right)^{-1/2}\partial_\mu C^{\mathrm{as}}(x) \tag{E.27}$$

さらに，$\left[iQ_B, \bar{C}^{\mathrm{as}}(x)\right]_+$ で係数行列を求めたいが，

$$\langle 0|T\boldsymbol{\delta}\bar{C}^A(x)\Phi_k^C|0\rangle = i\langle 0|T\mathscr{N}^A(x)\Phi_k^C|0\rangle \tag{E.28}$$

---

*4） つまり，5.1 節で議論したように，ゴースト場に対するスケール変換の対称性が自発的に破れておらず，ゴースト数演算子が well-defined になっている．$\langle 0|[iQ_C, \mathscr{O}]|0\rangle = N_{FP}\langle 0|\mathscr{O}|0\rangle$ ここで，N_{FP} は $\mathscr{O}$ のゴースト数である．

*5） R_μ^{AB} の評価で，$\mathscr{D}_\mu C$ の $\partial_\mu C$ 部分だけを考慮すると $R_\mu^{AB} = \tilde{Z}_3^{1/2}\partial_\mu\delta^{AB}$ となるが，残りの $g\mathscr{A}_\mu\times C$ の部分も加えてはじめて $R_\mu^{AB} = \tilde{Z}_3^{-1/2}\partial_\mu\delta^{AB}$ となることに注意したい．

でゼロにならないのは，Φ_k がゴースト数 0 のときのみだから，摂動論の範囲では零質量の $\mathscr{A}_\mu$ か $\mathscr{N}$ が候補だが，ST 恒等式 (5.99) より $\mathscr{N}$ は除外され，$\Phi_k = \mathscr{A}_\mu$ のみ寄与する．よって，ST 恒等式 (5.114) より，

$$\left[iQ_B, \tilde{Z}_3^{1/2}\bar{C}^{\mathrm{as}A}(x)\right]_+ = (R^{AB}Z_3^{-1/2}\mathscr{N}^{\mathrm{as}B})(x), \tag{E.29}$$

$$\begin{aligned} R^{AB}(x-y) &= \int d^Dz\,\Box_z\langle 0|Ti\mathscr{N}^A(x)\mathscr{A}_\nu^C(z)|0\rangle(\eta^{-1})^{\mathscr{A}_\nu^C\mathscr{N}^B}\delta^D(z-y) \\ &= \int d^Dzi\,\Box_y\frac{-\partial_\nu^x}{\Box}\delta^4(x-z)\delta^{AC}\left(\frac{-\partial^\nu}{\partial^2}\right)\delta^{CB}\delta^D(z-y) \\ &= i\delta^{AB}\delta^4(x-y) \end{aligned} \tag{E.30}$$

ここで $(\eta^{-1})^{\mathscr{A}_\nu^C\Phi^B} \neq 0$ となるのは $\Phi = \mathscr{N}$ のときだけであることを使った．よって，

$$\left[iQ_B, \bar{C}^{\mathrm{as}}(x)\right]_+ = (Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}i\mathscr{N}^{\mathrm{as}}(x) \tag{E.31}$$

くりこみ因子 $(Z_3\tilde{Z}_3)^{1/2}$ は，Q_B の再定義 $Q_B \to (Z_3\tilde{Z}_3)^{1/2}Q_B$ を行うか，あるいは C と $\bar{C}$ のスケール変換 $C \to e^\rho C, \bar{C} \to e^{-\rho}\bar{C}$，つまり $e^\rho = (Z_3\tilde{Z}_3)^{-1/2}$ で C と $\bar{C}$ を再定義して吸収することができる．

以上より，摂動論においては，Q_B は漸近場に対して次のように作用する．

$$\left[iQ_B, \mathscr{A}_\mu^{\mathrm{as}}(x)\right] = \partial_\mu C^{\mathrm{as}}(x) \tag{E.32a}$$

$$[iQ_B, C^{\mathrm{as}}(x)] = 0 \tag{E.32b}$$

$$\left[iQ_B, \bar{C}^{\mathrm{as}}(x)\right] = i\mathscr{N}^{\mathrm{as}}(x) \tag{E.32c}$$

$$[iQ_B, \mathscr{N}^{\mathrm{as}}(x)] = 0 \tag{E.32d}$$

E.4 BRS 電荷の漸近場による表現：非摂動論

Lorentz 型ゲージ固定の場合に，これまでの BRS 電荷 Q_B による漸近場の変換則

$$\mathscr{A}_\mu^A(x) \to \partial_\mu\chi^A(x) + \cdots \tag{E.33a}$$

$$(\mathscr{D}_\mu C)^A(x) \to \partial_\mu\gamma^A(x) + \cdots \tag{E.33b}$$

$$\bar{C}^A(x) \to \bar{\gamma}^A(x) + \cdots \tag{E.33c}$$

$$\mathscr{N}^A(x) \to \beta^A(x) + \cdots \tag{E.33d}$$

に加えて，さらに，反 BRS 電荷 $\bar{Q}_B$ による漸近場の変換則も併せて考える．

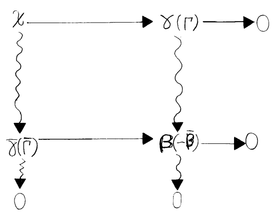

図 E.1　BRS 4 重項．実線の矢印は BRST 変換 δ を，波線の矢印は反 BRST 変換 $\bar{\delta}$ を施すことを表す．

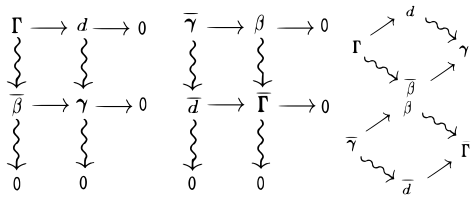

図 E.2　BRS 8 重項．

FP 共役不変性がある場合には[*6)]，

$$\bar{\mathscr{N}}^A(x) = -\mathscr{N}^A(x) + ig(C \times \bar{C})^A(x) \quad \to \bar{\beta}^A(x) + \cdots \tag{E.34a}$$

$$(\mathscr{D}_\mu \bar{C})^A(x) \quad \to \partial_\mu \bar{\Gamma}^A(x) + \cdots \tag{E.34b}$$

$$C^A(x) \quad \to \Gamma^A(x) + \cdots \tag{E.34c}$$

で定義される漸近場 $\bar{\beta}^A, \bar{\Gamma}^A, \Gamma^A$ が存在し，FP 共役変換により，$(\pm\bar{\beta}, \bar{\Gamma}^A, \pm\Gamma^A) = \mathscr{C}_{FP}(\mp\beta^A, \gamma^A, \mp\bar{\gamma}^A)\mathscr{C}_{\mathrm{FP}}^{-1}$ と関係づけられる．これらから次の関係がいえる．

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\delta}\chi = \gamma, \quad \boldsymbol{\delta}\gamma = 0, \quad \boldsymbol{\delta}\bar{\gamma} = i\beta, \quad \boldsymbol{\delta}\beta = 0 \\ &\bar{\boldsymbol{\delta}}\chi = \bar{\Gamma}, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\bar{\Gamma} = 0, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\Gamma = i\bar{\beta}, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\bar{\beta} = 0 \end{aligned} \tag{E.35}$$

まず，摂動論においては，

$$\Gamma = \gamma, \quad \bar{\Gamma} = \bar{\gamma}, \quad \bar{\beta} = -\beta \tag{E.36}$$

が成り立つ．このときには $\chi, \beta, \gamma, \bar{\gamma}$ は

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\delta}\chi = \bar{\boldsymbol{\delta}}\gamma = \bar{\boldsymbol{\delta}}\Gamma = i\bar{\beta} \\ &\boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{\delta}}\chi = \boldsymbol{\delta}\bar{\Gamma} = \boldsymbol{\delta}\bar{\gamma} = i\beta \end{aligned} \tag{E.37}$$

で規定される“ 素 ”**四重項表現 (quartet)** を形成し，漸近場による BRS 代数の表現は図式では図 E.1 のように示される．

次に，摂動に依らない，一般的な場合を考えると，

*6)　通常の Lorentz 型ゲージでは，FP 共役不変性があるのは Landau ゲージ $\alpha = 0$ の場合のみである．一般化 Lorentz ゲージではゲージパラメータ $\xi = 1/2$, $\lambda \in \mathbb{R}$（あるいは，$\alpha' = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$）のとき FP 共役不変性がある．変形最大可換ゲージではゲージパラメータ α の値に無関係に FP 共役不変性がある．

$$\Gamma \neq \gamma, \quad \bar{\Gamma} \neq \bar{\gamma}, \quad \bar{\beta} \neq -\beta \tag{E.38}$$

である．このとき，次のような表現が考えられる．ゴースト数 $+2, -2$ の結合状態に対応する漸近場 $d, \bar{d}$ を

$$(C \times C)^A(x) \to d^A(x) + \cdots \tag{E.39}$$

$$(\bar{C} \times \bar{C})^A(x) \to \bar{d}^A(x) + \cdots \tag{E.40}$$

で導入して，γ と $\bar{\Gamma}$ に注意して，

$$\boldsymbol{\delta}\Gamma = id, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\Gamma = i\bar{\beta}, \quad \boldsymbol{\delta}\bar{\beta} = -\gamma, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}d = \gamma \tag{E.41}$$

$$\boldsymbol{\delta}\bar{\gamma} = i\beta, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\bar{\gamma} = -i\bar{d}, \quad \boldsymbol{\delta}\bar{d} = \bar{\Gamma}, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\beta = \bar{\Gamma} \tag{E.42}$$

となるとし，かつ

$$\chi = \beta - \bar{\beta} + (\text{一重項}) \tag{E.43}$$

とすれば (E.35) と矛盾しない．もちろん，冪零性より，(E.35) に加えて，

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}\gamma = 0, \quad \boldsymbol{\delta}d = 0, \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}\bar{d} = 0, \quad \boldsymbol{\delta}\bar{\Gamma} = 0 \tag{E.44}$$

この場合，BRS 代数の漸近場による表現は**八重項表現 (octet)** を形成する．図式にまとめると図 E.2 のようになる，

このとき計量は，漸近場の (反) 交換関係

$$\begin{aligned}
&\left[\chi^A(x), \beta^B(y)\right]_- = i\left[\gamma^A(x), \bar{\gamma}^B(y)\right]_+ \\
&= -\left[\chi^A(x), \bar{\beta}^B(y)\right]_- = i\left[\Gamma^A(x), \bar{\Gamma}^B(y)\right]_+ = -i\delta^{AB}D(x-y) \\
&= -\left[\bar{d}^A(x), d^B(y)\right]_-
\end{aligned} \tag{E.45}$$

より求まる[*7)]．

E.5 漸近場による九後-小嶋のカラー閉じ込め条件

最後に，九後-小嶋のカラー閉じ込め条件の漸近場による取り扱いを検討する．$\bar{C}^A, \mathscr{N}^A$ の漸近場を $\bar{\gamma}^A, \beta^A$ とすると，

$$\bar{C}^A(x) \to \bar{\gamma}^A(x) + \cdots \tag{E.46}$$

$$\mathscr{N}^A(x) \to \beta^A(x) + \cdots \tag{E.47}$$

それらは，BRST 変換で，

$$\boldsymbol{\delta}\bar{\gamma}^A(x) = i\beta^A(x) \tag{E.48}$$

*7) さらに，一般的な BRS 代数の表現については，西島和彦，場の理論 (紀伊国屋書店, 1987) 18.7 節を参照せよ．

と関係する．このとき，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\mathscr{A}_\mu^A(x)$ の漸近場は，

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\delta}}\mathscr{A}_\mu^A(x) &= \left(\mathscr{D}_\mu\bar{C}\right)^A(x) = \partial_\mu\bar{C}^A(x) + g\left(\mathscr{A}_\mu\times\bar{C}\right)^A(x)\\ &\to \left(\delta^A{}_B + \tilde{u}^A{}_B\right)\partial_\mu\bar{\gamma}^B(x) + \cdots\end{aligned}\tag{E.49}$$

となる．ここで，$\tilde{u}^A{}_B$ を，複合演算子 $\mathscr{A}_\mu\times\bar{C}$ の漸近場を用いて次のように定義した．

$$g\left(\mathscr{A}_\mu\times\bar{C}\right)^A(x)\to\tilde{u}^A{}_B\partial_\mu\bar{\gamma}^B(x)+\cdots\tag{E.50}$$

$\tilde{u}^A{}_B$ は x 依存性をもたない．このとき，

$$-i\boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{\delta}}\mathscr{A}_\mu^A(x)\to -i\left(\delta^A{}_B+\tilde{u}^A{}_B\right)\partial_\mu\boldsymbol{\delta}\bar{\gamma}^B(x)+\cdots=\left(\delta^A{}_B+\tilde{u}^A{}_B\right)\partial_\mu\beta^B(x)+\cdots\tag{E.51}$$

よって $-i\boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{\delta}}\mathscr{A}_\mu^A(x)$ には，零質量 1 粒子 $\beta^A(x)$ が重み $\delta^A{}_B+\tilde{u}^A{}_B$ で効いていることがわかる．よって，$\delta^A{}_B+\tilde{u}^A{}_B=0$ ならば，これを避けることができる．$\tilde{u}^A{}_B$ は，$-p_\mu p_\nu/p^2$ pole の留数 $\tilde{U}^A{}_B(p=0)$ に等しいことが，次のようにしてわかる．$\left(\mathscr{D}_\mu C\right)^A(x)\to\partial_\mu\gamma^A(x)+\cdots$ と $g\left(\mathscr{A}_\mu\times\bar{C}\right)^A(x)\to\tilde{u}^A{}_B\partial_\mu\bar{\gamma}^B(x)+\cdots$ より，

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\left|T\left(\mathscr{D}_\mu C\right)^A(x)\left(g\mathscr{A}_\nu\times\bar{C}\right)^B(y)\right|0\right\rangle=\left(g_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu^x\partial_\nu^x}{\partial_x^2}\right)U^{AB}(x-y)\\ &\to\left\langle 0\left|T\partial_\mu\gamma^A(x)\tilde{u}^B{}_C\partial_\nu\bar{\gamma}^C(y)\right|0\right\rangle=-\tilde{u}^B{}_A\frac{\partial_\mu^x\partial_\nu^y}{\partial_x^2}\delta^4(x-y)\end{aligned}\tag{E.52}$$

本当は，∂_μ^x をかけてゼロになるはずだから

$$\left\langle 0\left|T\left(\mathscr{D}_\mu C\right)^A(x)\left(g\mathscr{A}_\nu\times\bar{C}\right)^B(y)\right|0\right\rangle\to\left(g_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu^x\partial_\nu^x}{\partial_x^2}\right)\tilde{u}^B{}_A\delta^4(x-y)\tag{E.53}$$

となると考えられる*8)．これの Fourier 変換は，

$$\text{F.T.}\left\langle 0\left|T\left(\mathscr{D}_\mu C\right)^A(x)\left(g\mathscr{A}_\nu\times\bar{C}\right)^B(y)\right|0\right\rangle\to\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\tilde{u}^B{}_A\tag{E.54}$$

これを，

$$\text{F.T.}\left\langle 0\left|T\left(\mathscr{D}_\mu C\right)^A(x)\left(g\mathscr{A}_\nu\times\bar{C}\right)^B(y)\right|0\right\rangle=\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\tilde{U}^{AB}(p)\tag{E.55}$$

と比較すればよい．

よって，漸近場の存在を仮定すれば，Kugo-Ojima のカラー閉じ込め条件は，7.3 節で議論した特定のセクターに限らずカラー閉じ込めの十分条件として成

*8) 漸近場は弱極限の意味で考えていることに注意．

立すると考えられる．この立場は，カラーを持つ粒子は，漸近場は持つけれども補助条件に従う物理的状態空間に属さないと考える立場である．この場合，しかし，ジェットのような実験事実を通じて間接的にはクォークやグルーオンの存在を確認しているのとは矛盾していないかという問題もある．また，最近，高温高密度では非閉じ込め相が存在するとされているが，これをこの立場でどう理解するのかという問題もある．しかし，そもそも基本場に対応するカラーを持つ粒子（クォークやグルーオン）がすべて閉じ込められることが期待される QCD において果たして，十分過去と未来で自由場の方程式に従う漸近場が存在するかに関しては意見がわかれるところである[*9)]．また，カラーを持つ粒子は漸近場を持たないと考える立場もあるが，カラーの無い漸近場からカラーをもつ演算子は作れないので，漸近的完全性と矛盾するともいえる．両者を融合させる議論が必要である．

*9) 漸近場の存在が厳密に証明されているのは，スカラー場の場合で，Haag-Ruelle の散乱理論と呼ばれる．N.N. Bogoliubov，A.A. Logunov and I.T. Todorov，場の量子論の数学的方法（江沢他訳，東京図書，1972）の 4 章を参照．

付録 F
非線形表現

NG 場 $\pi(x)$ による群 G の非線形表現の要点をまとめる．

F.1 非線形表現

一般に，対称性が群 G からその部分群 H へ自発的に破れた場合には，商空間 G/H の次元（$\dim(G/H) = \dim G - \dim H$）に等しい個数の NG ボソン $\pi^a(x)(a = 1, \cdots, \dim(G/H))$ が現れる．商空間 G/H の代表元 ξ を NG ボソン場 π^a でパラメトライズする．

$$\xi(\pi) = e^{i\pi(x)}, \quad \pi(x) = \sum_{T^a \in \mathscr{G} - \mathscr{H}} \pi^a(x) T^a. \tag{F.1}$$

群 G の大局的変換（$g \in G$）の下では，ξ は

$$\xi(\pi) \to \xi(\pi') = g\xi(\pi)h^{-1}(\pi, g), \quad g \in G, \quad h(\pi, g) \in H, \tag{F.2}$$

のように変換し，$\pi(x)$ から $\pi'(x)$ への変換は，場 $\pi^a(x)$ に関して非線形になる．（この h は，g と同時に π にも依るので $h(\pi, g)$ と書く．）このような，NG 場 $\pi(x)$ による群 G の表現は**非線形表現**と呼ばれる．

一方，破れていない部分群 H の下では線形に変換する．H の元 h に対して，

$$\xi(\pi) \to \xi(\pi') = h\xi(\pi)h^{-1} \quad \text{or} \quad \pi(x) \to \pi'(x) = h\pi(x)h^{-1}, \quad h \in H. \tag{F.3}$$

G が単純群の場合，大局的変換 G の下で不変なラグランジアンは，

$$\alpha(\pi) = \alpha_\mu(\pi) dx^\mu := i^{-1}\xi^{-1}(\pi) d\xi(\pi), \tag{F.4}$$

$$\alpha_\mu(\pi) = i^{-1}\xi(\pi)\partial_\mu \xi(\pi), \tag{F.5}$$

で定義される Lie 代数 $\mathscr{G}$ に値をとる Maurer-Cartan（マウレー・カルタン）

1-form の直交成分（破れた生成子 $\mathscr{G}-\mathscr{H}$ に属する成分）

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi):=\alpha_\mu^a(\pi)T^a=2\mathrm{tr}\left(T^a\alpha_\mu(\pi)\right)T^a\in\mathscr{G}-\mathscr{H}, \tag{F.6}$$

を用いて，

$$\mathscr{L}=f^2\mathrm{tr}\left\{(\alpha_{\mu\perp}(\pi))^2\right\}, \tag{F.7}$$

で与えられる．このラグランジアンは，NG ボソン場のみから作られる微分の次数が最低次（つまり 2 次）で G 不変になっている．

ちなみに，$\alpha_\mu(\pi)$ の変換則は，$\xi(\pi)$ のそれから

$$\alpha_\mu(\pi)\to\alpha_\mu(\pi')=h(\pi,g)\alpha_\mu(\pi)h^{-1}(\pi,g)+i^{-1}h(\pi,g)\partial_\mu h^{-1}(\pi,g) \tag{F.8}$$

となる．これから平行・直交成分の変換則は，

$$\alpha_{\mu\|}(\pi)\to\alpha_{\mu\|}(\pi')=h(\pi,g)\alpha_{\mu\|}(\pi)h^{-1}(\pi,g)+i^{-1}h(\pi,g)\partial_\mu h^{-1}(\pi,g) \tag{F.9}$$

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi)\to\alpha_{\mu\perp}(\pi')=h(\pi,g)\alpha_{\mu\perp}(\pi)h^{-1}(\pi,g) \tag{F.10}$$

となる．直行成分は斉次な変換をするのに対し，平行成分は非斉次項 $i^{-1}h\partial_\mu h^{-1}$ をもつ．

さらに，局所的不変なラグランジアンを構成するには，Maurer-Cartan 1-form $\alpha_\mu(\pi)$ において，$\partial_\mu\xi$ を共変微分に置き換えればよい．

$$\tilde{\alpha}_\mu(\pi):=i^{-1}\xi^{-1}(\pi)D_\mu[V]\xi(\pi),\quad D_\mu[V]\xi(\pi):=\partial_\mu\xi(\pi)-igV_\mu(x)\xi(\pi). \tag{F.11}$$

ここで V_μ はゲージ群 G' のゲージ場 $V_\mu(x)=V_\mu^\alpha(x)T^\alpha$（$T^a$ は G' の生成子）である．G' は G 自身でもその部分群でもよい（$G'\subseteq G$）．

ラグランジアン

$$\mathscr{L}=f^2\mathrm{tr}\left\{\tilde{\alpha}_{\mu\perp}(\pi)^2\right\}, \tag{F.12}$$

は，大局所 G 不変でかつ局所的 G' 不変（G' ゲージ不変）になる ($G'\subseteq G$)．もし，$G'\supsetneqq H$ ならば，このラグランジアンは $\mathscr{G}'-\mathscr{H}$ の生成子に対応したゲージ場 V_μ^α の質量項を与える．

特に，群 G がすべて破れた場合（$H=\{1\}$ つまり $\mathscr{H}=\{0\}$）は，$\alpha_{\mu\|}$ 成分はなくなり，$\alpha_{\mu\perp}$ は α そのものになるので，

$$\mathscr{L}=-f^2\mathrm{tr}\left\{\left(\xi^{-1}(\pi)\partial_\mu\xi(\pi)\right)^2\right\}. \tag{F.13}$$

$G'=G$ の場合は，$\mathscr{G}$ のすべての生成子に対応したゲージ場 $\mathscr{A}_\mu^A$ の質量項は，

$$\mathscr{L} = -f^2 \mathrm{tr}\left\{\left(\xi^{-1}(\pi)D_\mu[\mathscr{A}]\xi(\pi)\right)^2\right\}, \tag{F.14}$$

で与えられる．実際，

$$\xi^{-1}D_\mu[\mathscr{A}]\xi = \xi^{-1}\left(\partial_\mu\xi - ig\mathscr{A}_\mu\xi\right) \tag{F.15}$$

を用いて，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left\{\xi^{-1}D_\mu[\mathscr{A}]\xi\xi^{-1}D^\mu[\mathscr{A}]\xi\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\left(\partial_\mu\xi - ig\mathscr{A}_\mu\xi\right)\xi^{-1}\left(\partial^\mu\xi - ig\mathscr{A}^\mu\xi\right)\xi^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\left(\partial_\mu\xi\xi^{-1} - ig\mathscr{A}_\mu\right)\left(\partial^\mu\xi\xi^{-1} - ig\mathscr{A}^\mu\right)\right\} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\left(\xi\partial_\mu\xi^{-1} + ig\mathscr{A}_\mu\right)\left(\xi\partial^\mu\xi^{-1} + ig\mathscr{A}^\mu\right)\right\} \\
&= -g^2\mathrm{tr}\left\{\left(\mathscr{A}_\mu - ig^{-1}\xi\partial_\mu\xi^{-1}\right)\left(\mathscr{A}^\mu - ig^{-1}\xi\partial^\mu\xi^{-1}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{F.16}$$

と変形すると，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_m &= m^2\mathrm{tr}\left\{\left(\mathscr{A}_\mu - ig^{-1}U\partial_\mu U^{-1}\right)^2\right\}, \quad U = \xi^{-1}, \quad m = gf \\
&= f^2\mathrm{tr}\left\{\left(D_\mu[\mathscr{A}]\xi\right)^\dagger\left(D_\mu[\mathscr{A}]\xi\right)\right\}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

となることがわかる．

$\alpha_\mu(\pi)$ を π に関して展開すると，

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu(\pi) &= \frac{1}{i}\xi^{-1}(\pi)\partial_\mu\xi(\pi) = \frac{1}{i}e^{-i\pi}\partial_\mu e^{i\pi} \\
&= \partial_\mu\pi + \frac{1}{2!}\frac{1}{i}\left[\pi, \partial_\mu\pi\right] + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^2\left[\pi, \left[\pi, \partial_\mu\pi\right]\right] + \cdots \\
&= \partial_\mu\pi + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{i}\right)^n \overbrace{[\pi, [\pi, \cdots, [\pi}^{n}, \partial_\mu\pi]\cdots]]
\end{aligned} \tag{F.18}$$

G/H が対称空間（すなわち $[\mathscr{G}-\mathscr{H}, \mathscr{G}-\mathscr{H}] \subset \mathscr{H}$）の場合は，$\pi$ について偶数次の部分は $\mathscr{H}$ に属し，奇数次の部分は $\mathscr{G}-\mathscr{H}$ に属すので（$[\mathscr{H}, \mathscr{G}-\mathscr{H}] \subset \mathscr{G}-\mathscr{H}$ は常に成り立つ），ラグランジアンを作るには，奇数次項のみとってくればよい．

$$\alpha_{\mu\perp}(\pi) = \partial_\mu\pi + \frac{1}{3!}(if_\pi)^{-2}[\pi, [\pi, \partial_\mu\pi]] + \cdots \tag{F.19}$$

ここでは，$\mathscr{G}-\mathscr{H}$ の生成子 $\{T^a\}$ が，H-既約であることを仮定したが，一般には，$hT^ah^{-1} \in \mathscr{G}-\mathscr{H}$ であるから，$\{T^a\}$ は H の（線形で）可約な表現基底を与える．この場合にも $\{T^a\}$ の既約分解を考えれば同様に出来る．

G が単純群でない場合も本質的には同様にやれる[*1)]．

*1）詳細は，例えば，九後汰一郎，ゲージ場の量子論 II (培風館，1989) や M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, Phys. Reports **164**, 217 (1988) を見よ．