令和３年度
大学院融合理工学府博士前期課程　学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目 (１)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。

2. 問題は全部で4ページある。

3. 問題 I, II の両方に解答すること。

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて 1 枚以上の解答用紙を提出すること。

5. 全ての解答用紙に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

質量 m の質点が，中心力ポテンシャル $U(r)$ (r は原点からの距離) の下で古典的かつ非相対論的に運動している。

1. 中心力ポテンシャル $U(r)$ の下での質点の運動の一般的性質について考えよう。

(1) この質点の角運動量 $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{r}$ は質点の位置ベクトル, $\boldsymbol{p}$ は運動量ベクトル) が保存することを示しなさい。

(2) この質点の持つ力学的エネルギー $E = \dfrac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(r)$ が保存することを示しなさい。

(3) $|\boldsymbol{\ell}| \neq 0$ とし，z 軸を $\boldsymbol{\ell}$ の向きに取る。このとき，$\boldsymbol{\ell} \perp \boldsymbol{r}$ より質点は xy 平面上を運動する。$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として，運動エネルギー $K = \dfrac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$ を m, r, θ, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。

(4) ℓ_z を m, r, θ, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表しなさい。

(5) ℓ_z は保存量であるので，これを初期条件により固定すると，$E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\mathrm{eff}}(r)$ と表せる。この $U_{\mathrm{eff}}(r)$ を m, ℓ_z, r および $U(r)$ を用いて表しなさい。

(6) E および ℓ_z を初期条件により固定したとき，動径 (r) 方向の運動方程式を m, ℓ_z および r, $U(r)$ とそれらの適切な微分を用いて表しなさい。

2. 中心力ポテンシャルが $U(r) = cr^{\lambda}$ (ただし c, λ は定数, $\lambda > -2$) の形を持つ場合を考えよう。

(1) $\lambda > 0$ の場合について，質点が束縛運動するための c に対する条件を求めなさい。その理由も明らかにすること。

(2) $-2 < \lambda < 0$ の場合について，質点が束縛運動するための c に対する条件を求めなさい。その理由も明らかにすること。

(3) 質点が原点の周りを円運動するとき，円運動の半径 r_0 と力学的エネルギー E_0 を m, c, λ, ℓ_z で表しなさい。また，$U(r_0)$ $\big(U_{\mathrm{eff}}(r_0)$ ではない$\big)$ の E_0 に対する比を λ で表しなさい。

3. $\lambda = 2$, すなわち $U(r) = cr^2$ とし，質点が束縛運動する場合を考えよう。ただし，$E \neq E_0$, $\ell_z \neq 0$ とする。
なお，次の積分公式を証明なしに用いてよい ($0 < x_- < x_+$ とする)。

$$\begin{aligned}
\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} &= \pi \\
\int_{x_-}^{x_+} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} &= \pi\,\frac{x_+ + x_-}{2} \\
\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{x\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} &= \frac{\pi}{\sqrt{x_+ x_-}}
\end{aligned}$$

(1) 質点の持つ r の値の範囲を $r_- \leq r \leq r_+$ と表したときの r_- および r_+ を m, c, λ, ℓ_z, E で表しなさい。

(2) 質点の原点からの距離が r_- になったときの時刻を t_- とし，その次に原点からの距離が r_+ になったときの時刻を t_+ とする。質点の原点からの距離が r_- から r_+ まで変化するのに要する時間 $t_+ - t_-$ を求めなさい。

(3) 時刻 t_- から t_+ までの間に，問題 **1. (3)** で定義した角度 θ がどれだけ変化するかを求めなさい。

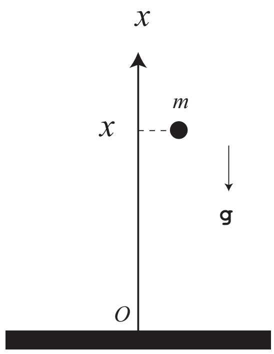
(4) 質点の原点からの距離が r_- から r_+ まで変化するときの $U(r)\ (= c\,r^2)$ の平均値の，力学的エネルギー E に対する比を求めなさい。ただし，$U(r)$ の平均値は，

$$\big\langle U(r) \big\rangle = \frac{1}{t_+ - t_-} \int_{t_-}^{t_+} U\big(r(t)\big)\, dt$$

で計算される。

II

量子力学に従う質量 m を持つ粒子が，鉛直下向きの一様な重力場中で鉛直方向の（1 次元）運動を行うとする。ただし，重力加速度の大きさを g とする。図に示すように，鉛直上向きに座標 x を設定し，その原点 O に水平なミラーを置いて完全反射壁とする。すなわち，ポテンシャルは $x = 0$ で無限大であるとする。



図

1. 座標演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の間に成り立つ正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

は表示に無関係に成り立つ演算子間の関係である。座標表示では，運動量演算子 $\hat{p}$ は微分演算子 $-i\hbar\frac{d}{dx}$ に，座標演算子 $\hat{x}$ は x を掛ける操作に対応する。これを踏まえて，運動量表示での座標演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ はどのような操作に対応するか答えなさい。

2. まず，定常状態を考えよう。

(1) エネルギー固有値 E を持つエネルギー固有関数 $\varphi_E(x)$ $(x > 0)$ の従う Schrödinger 方程式を座標表示で書き下しなさい。それを運動量表示で書き直し，それを解いて運動量表示の波動関数 $\tilde{\varphi}_E(p)$ を求めなさい。ただし，規格化はしなくてよい。

(2) $\tilde{\varphi}_E(p)$ から座標表示の波動関数 $\varphi_E(x)$ を求める表式を書きなさい。計算は実行しなくてよい。

(3) 波動関数 $\varphi_E(x)$ の概形を，基底状態，第 1 励起状態，第 2 励起状態まで，横軸を x，縦軸を $\varphi_E(x)$ として描きなさい。そのような概形になる理由も記しなさい。（$\varphi_E(x)$ は位相をうまく選べば実数にできることに注意。）

(4) 粒子は中性子であるとして基底状態のエネルギー準位を電子ボルトの単位で求めなさい。ただし，中性子の質量 $m_n = 1.68 \times 10^{-27}$kg，重力加速度の大きさ $g = 9.8\text{m/s}^2$，Dirac 定数（Planck 定数を 2π で割った数）$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$ および $1\text{J} = 6.24 \times 10^{18}\text{eV}$ である。

次の事実は証明せずに用いてよい。積分

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du\ \cos\left[zu + \frac{u^3}{3}\right]$$

で定義される関数 $\Phi(z)$ を Airy（エアリー）関数というが，$\Phi(z=0)>0$，$\Phi(z\to+\infty)\to 0$ であり，そのゼロ点 z_n は全て負で，無限個あり，

$$z_0=-2.34,\ z_1=-4.09,\ z_2=-5.52,...$$

で与えられることが知られている。

3. 次に，時間に依存した波動関数 $\psi(x,t)$ で記述される一般的な運動を調べよう。

(1) $\psi(x,0)$ を固有値方程式 $H\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$ の固有関数 $\psi_n(x)$ の完全規格直交系 $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ で展開し，$\psi(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$ とおくと，

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}$$

は時刻 t での Schrödinger 方程式の解になっていることを示しなさい。ただし，H はこの Schrödinger 方程式に従う系のハミルトニアン演算子である。

(2) 時刻 t での Schrödinger 方程式の解は

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dw\ G(w,x,t)\psi(w,0)$$

と書ける。このような関数 $G(w,x,t)$ を $\psi_n(x)$, $\psi_n(w)$ と E_n を用いて表しなさい。その結果は，$t=0$ で両辺が等しいことから要求される $G(w,x,0)=\delta(w-x)$ を満たしていることを示しなさい。ここで，$\delta(w-x)$ は Dirac のデルタ関数である。

(3) 1 次元で，全く力が働かない場合に，$G(w,x,t)$ を w,x,t の関数として求めなさい（$-\infty<x,w<\infty$）。

次の積分公式は証明せずに用いてよい。複素数 A,B に対して，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dz\exp\left[-\frac{A}{2}z^2+Bz\right]=\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{1}{2A}B^2\right]$$

4. 以下では，ミラーがない場合に，時間に依存した波動関数 $\varphi(x,t)$ で記述される運動を調べよう。エネルギー固有値 E は，ミラーが存在するときは **2.** で考察したように離散的であったが，ミラーがない場合には連続的な値をとるようになった。この場合，**2.** の結果を用いて，**3.(2)** で導入した $G(w,x,t)$ を w,x,t の関数として求めると

$$G(w,x,t)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{i}{24}\frac{mg^2t^3}{\hbar}-\frac{i}{2}\frac{mgt}{\hbar}(w+x)+\frac{i}{2}\frac{m}{\hbar t}(w-x)^2\right]$$

となる。ここで i は虚数単位である。

このとき，時刻 $t=0$ での波動関数 $\varphi(x,0)$ が波束

$$\varphi(x,0)=\frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

（a は正の定数）で与えられると仮定して，その後の時刻 $t>0$ での波動関数 $\varphi(x,t)$ の絶対値の 2 乗 $|\varphi(x,t)|^2$ を計算して，波束の中心と波束の広がりはどのような時間依存性を示すかを答えなさい。また，それぞれの m と g に対する依存性を述べなさい。計算が遂行できない場合でも，結果の予想を理由をつけて述べなさい。