

令和3年度
大学院融合理工学府博士前期課程 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目(2)(物理学)

試験時間 120分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で5ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また、問題 I, II のそれぞれについて1枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に、問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

例えば黒体輻射（すなわち熱平衡状態にある電磁波）は、マクロな大きさの空間に閉じ込められた、温度によって粒子数が変化する粒子数不定の光子（ボース粒子）系として記述される。ここではこの考え方を一般化し、空間次元が $d (= 1, 2, 3)$ のマクロな大きさの箱（1辺の長さを L とする）に閉じ込められた、粒子数不定の量子論的自由粒子系（ボース粒子系またはフェルミ粒子系）を考えよう。以下の **3.** までは、粒子のスピン自由度は無視してよい。

この体系の粒子は、 \mathbf{k} を粒子の波数ベクトルとして、分散関係

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar c_s |\mathbf{k}|^s, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_d^2}$$

を持つ。 s と c_s は正の定数である。周期境界条件を仮定すれば、 $\alpha = 1, \dots, d$ として、

$$k_\alpha = \frac{2\pi}{L} \nu_\alpha \quad (\nu_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

である。

1. この体系の1粒子状態密度

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &= \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int dk_1 \cdots \int dk_d \delta(\varepsilon - \hbar c_s |\mathbf{k}|^s) \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \frac{d}{d\varepsilon} \int dk_1 \cdots \int dk_d \theta(\varepsilon - \hbar c_s |\mathbf{k}|^s) \end{aligned}$$

を ε のべき関数として $\rho(\varepsilon) \propto \varepsilon^f$ と書くとき、 f を求めなさい。ここで $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、 $\theta(x)$ は階段関数である。半径 R の n 次元超球の体積は、 $\Gamma(x)$ をガンマ関数として、

$$C_n(R) = R^n \pi^{n/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

であることを用いてよい。

2. この体系が絶対温度 T [逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$] の熱平衡状態にあるとき、波数ベクトル \mathbf{k} を持つ粒子の数 $n_{\mathbf{k}}$ のカノニカル平均 $\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \sum_{\sigma} n_{\mathbf{k}} e^{-\beta E_{\sigma}} / \sum_{\sigma} e^{-\beta E_{\sigma}}$ は、ボース粒子系なら

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1}$$

であり、フェルミ粒子系なら

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{\mathbf{k}}} + 1}$$

であることを証明しなさい。ここで、微視状態 $\sigma = \{\dots, n_{\mathbf{k}}, \dots\}$ のエネルギー E_{σ} は、 $E_{\sigma} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ と与えられる。

3. この体系の定積熱容量 C_V を、絶対温度 T のべき関数として $C_V \propto T^g$ と書くとき、 g をボース粒子系、フェルミ粒子系のそれぞれの場合について求めなさい。 $V = L^d$ である。**1.** で定義した f を用いて解答してもよい。

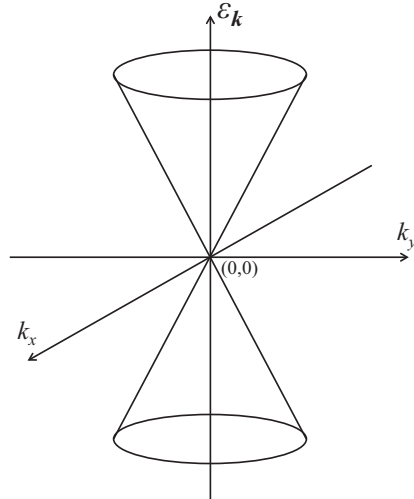


図 1: ディラック電子の分散関係

次に、図 1 に示すように、波数ベクトル \mathbf{k} に対して、線形の分散関係

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \pm \hbar v_F |\mathbf{k}|, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

を持つ 2 次元電子系（ディラック電子系）を考えよう。 v_F は正の定数（フェルミ速度）である。絶対零度（ $T = 0$ K）でのフェルミ準位 ε_F は、 $\varepsilon_{\mathbf{k}} = 0$ の位置にあるとする。

4. この体系の 1 粒子状態密度 $\rho(\varepsilon)$ を計算し、その概形を、縦軸を $\rho(\varepsilon)$ 、横軸を ε として図示しなさい。

5. この体系の $T = 0$ K の状態を「真空」と考えて、有限温度ではそこから電子と正孔（ともにスピン 1/2 のフェルミオン）が励起すると考えることにより、この系の定積熱容量 C_V を温度の関数として計算しなさい。必要なら次の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x + 1} dx = \frac{3}{2} \zeta(3), \quad \zeta(3) = 1.20205\dots (\text{アペリ定数})$$

(注) 近年、我国においてディラック電子系の熱容量の測定が行われ、理論値に近い値が得られることが確認された [Konoike *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 043601 (2012)]。

6. この体系が絶対温度 T の熱平衡状態にあるとき、励起した電子の総数を計算しなさい。必要なら次の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

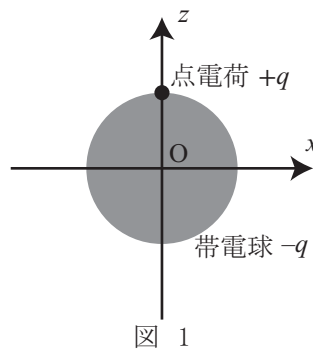
また、1 個の自由電子が μ_B をボーア磁子としてスピン磁化率 $\mu_B^2 / (k_B T)$ （キュリー則）を持つことを利用し、この体系のスピン磁化率 χ を温度の関数として計算しなさい。

II

原点を中心とした半径 a の球内に、総電荷量が $-q$ ($q > 0$) となるように均一に分布させた帯電球を真空中に固定する。帯電球内の電荷分布は固定されているものとする。真空の誘電率を ϵ_0 とし、重力の影響は無視できるとして、以下の問いに答えなさい。

1. 原点からの距離が r の点における電場の強さと向きを求め、電場の強さの r 依存性の概形をグラフに示しなさい。
2. 原点からの距離が r の点における電位を求め、その電位の r 依存性の概形をグラフに示しなさい。ただし、無限遠での電位を 0 とすること。

帯電球により作られた電場中で運動する、質量 m 、電荷量 $+q$ の点電荷を考える。点電荷は抵抗力や他の電荷との衝突による影響を受けることなく運動でき、電磁誘導による影響や輻射によるエネルギーの損失も無視できるとする。以下では、位置は直交座標 (x, y, z) で表すものとする。



3. 図1のように点電荷を点 $(0, 0, a)$ に置き、時刻 $t = 0$ において静かに放した。この後の、点電荷の位置を時刻 t の関数として求めなさい。
4. 図1のように点電荷を点 $(0, 0, a)$ に置き、 $(v_0, 0, 0)$ ($v_0 > 0$) の速度を与えたところ、原点を中心とする円運動をした。 v_0 を求めなさい。
5. y 軸に平行に均一な磁場 $\mathbf{B} = (0, B_0, 0)$ を印加した。図1のように点電荷を点 $(0, 0, a)$ に置き、 $(v_1, 0, 0)$ ($v_1 > 0$) の速度を与えたところ、点電荷は原点を中心とする円運動をした。 B_0 を求めなさい。

図2のように帯電球により作られた電場の中に、電荷量 $\frac{q}{2}$ の2つの点電荷を z 軸上に置いたところ、それぞれの点電荷にはたらく力は0であった。

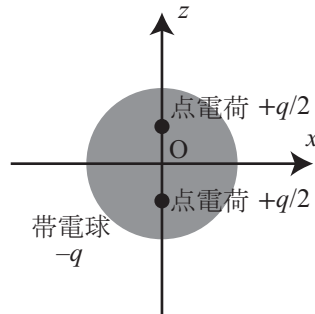


図 2

6. 2つの点電荷の座標を求めなさい。

7. 2つの点電荷と帯電球が作る電位は、原点から十分に離れた点 ($r \gg a$) で $\phi = r^n f(\theta)$ と書ける。ここで、 r は原点からの距離、 θ は z 軸の正の向きから測った角度である。指数 n と $f(\theta)$ を求めなさい。

帯電球を取り除き、図3のように $z = -b$ ($b > a$) に無限に広い接地された平面導体を置き、点 $(0, 0, z_0)$ ($z_0 > -b$) に電荷量 q の点電荷を置いた。

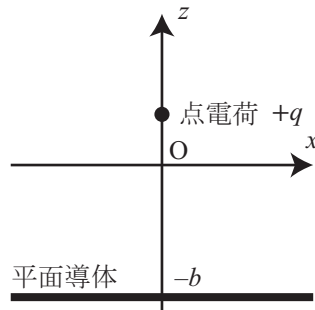


図 3

8. 点電荷にはたらく力を求めなさい。

9. 点電荷を z 軸上を正の向きに動かして無限遠まで移動させるのに必要な仕事を求めなさい。

次に，図4のように帯電球をもとの位置に再び置いた。

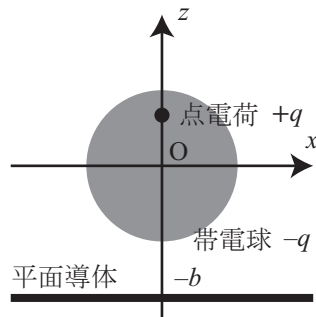


図 4

10. 点電荷が帯電球内部の点 $(0, 0, z_0)$ ($z_0 > -b$) にあるとき，点電荷にはたらく力の和を求めなさい。ただし， $|z_0|$ は b に比べて十分に小さいと考えて近似し， z_0 について1次まで展開すること。

11. 点電荷が z 軸上を原点まわりで微小な振幅の単振動をするとき，その振動数は平面導体がない場合の何倍になるか求めなさい。