

2023年4月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目 (1)

検査時間 120分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で4ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また、問題 I, II のそれぞれについて1枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に、問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図1のように、水平面内にそれぞれ質量 m の質点 1, 2, 3 を円周上に配置し、軽いばねで接続した。質点 1 と 2 の間, 質点 1 と 3 の間のばねのばね定数は k , 質点 2 と 3 の間は k' であった。質点とばねは、円周上のみを滑らかに運動することができ、ばねの弾性力は円の接線方向のみに働くものとする。この系の質点の運動について以下の問いに答えなさい。解答には $\lambda = k/m, \lambda' = k'/m$ を用いてよい。

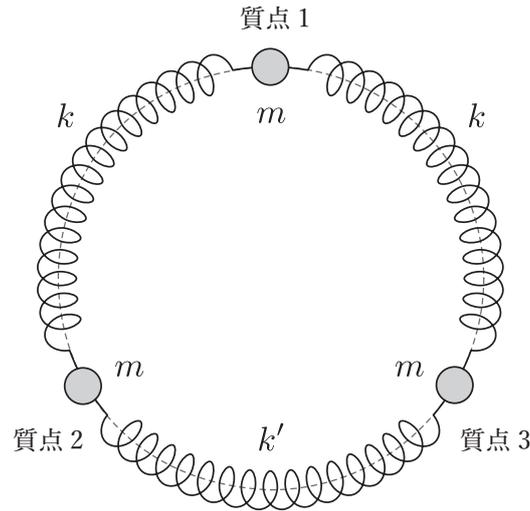


図 1

1. まず、三つの質点がつり合いの状態では静止していた場合を考える。円周の長さを L , 三つのばねの自然長を ℓ とし、つり合いの状態の質点 1 の位置を原点として、円に沿って反時計回りに x' 軸をとる。 $r = k/k'$ としたときの質点 2 の x' 座標 x'_2 を r, L, ℓ を用いて表しなさい。また、 x'_2 の r の関数としての振る舞い、すなわち $x'_2(r)$ をグラフに示しなさい。その際、 $r = 0, 1$ での値、 $r \rightarrow \infty$ の漸近値をそれぞれ記入すること。ただし、 $L > 3\ell$ であるとする。

以降は、つり合いの状態からずれた場合を考える。ただし、ばね定数は $k' > k$ とする。また、以降の解答には r を用いずに答えること。

2. 1. で求めた質点 1, 2, 3 のつり合いの位置からのずれをそれぞれ x_1, x_2, x_3 とする。反時計回りのずれを正、時計回りのずれを負と定義する。この系のラグランジアンを求めなさい。ただし、ずれの時間微分 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ は解答に用いてよい。また、つり合いの状態を位置エネルギーの基準とする。
3. 2. の結果を用いて、質点 1, 2, 3 についての運動方程式をそれぞれ求めなさい。
4. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ とおくと (T は転置を表す), 3. で求めた運動方程式は行列 \mathbf{A} を用いて

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

と表すことができる。行列 A の各成分を求めなさい。解答には k, k', m は用いずに λ, λ' を用いなさい。

5. この系の固有角振動数三つをそれぞれ求めなさい。解答には k, k', m は用いずに λ, λ' を用いなさい。

6. 適当な定数 c_{ij} を用いて変数 X_i ($i = 1, 2, 3$) を

$$X_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j$$

と定義することで、この系の力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (m\dot{X}_i^2 + k_i X_i^2)$$

と書くことができる。 X_1, X_2, X_3 を x_1, x_2, x_3 を用いて表しなさい。また、 k_1, k_2, k_3 をそれぞれ求めなさい。ただし、 $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ とする。

7. 時刻 $t = 0$ に質点の位置のずれ、速度が以下のような状態にあった場合に x_2 を時刻 t の関数としてそれぞれ表しなさい。ただし、 x_0, v_0 はゼロでない定数とする。

(1) $x_1 = -2x_0, x_2 = 2x_0, x_3 = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$

(2) $x_1 = x_2 = x_3 = x_0, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 3v_0$

8. 7. の (1) の設定で振動を始めた質点 2 の位置のずれを観測すると図 2 のようにうなりを示しながら時間変化した。実線が実際のずれの値、点線が包絡線を表す。 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ (ただし、 $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$) とした時の $\Delta\lambda/\lambda$ を求めなさい。ただし、近似式 $(1 + \Delta\lambda/\lambda)^{1/2} \sim 1 + \Delta\lambda/(2\lambda)$ を用いてよい。また、グラフ中の τ_0 は $\tau_0 = 4\pi\sqrt{3m/k}$ とする。必要ならば以下の三角関数の積和の公式を用いること。

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

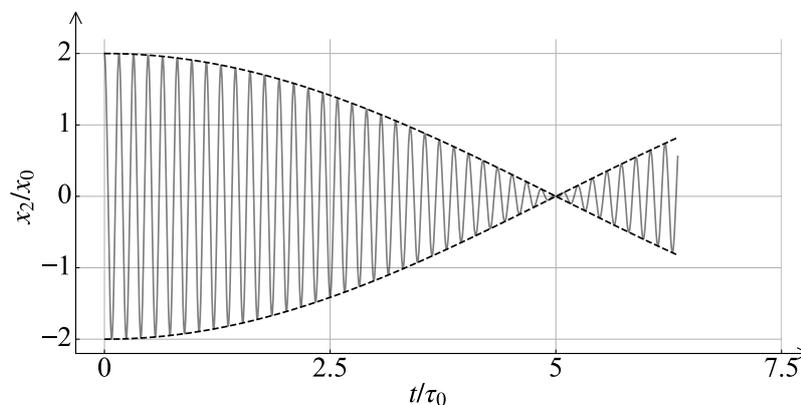


図 2

II

電磁波と電場についての以下の問いに答えよ。 \vec{E} は電場を, \vec{B} は磁束密度を表す。真空中の誘電率と透磁率はそれぞれ ϵ_0 と μ_0 で, 真空中の光速は $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ と表される。単位系は SI 単位系を用いるものとする。

A. 真空中を伝播する電磁波を考える。

1. 電荷・電流がないとき, 微分形の真空中のマクスウェル方程式を, \vec{E} と \vec{B} を用いて書き下せ。
2. \vec{E} と \vec{B} に対する真空中の波動方程式を導き, ϵ_0, μ_0 を用いず c を用いて表せ。必要があれば任意の三次元ベクトル場 \vec{V} に対して成り立つ公式

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V} \quad (1)$$

を用いてよい。

3. 次の形で表される電場

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2)$$

は, 前問で求めた波動方程式の \vec{k} 方向に進行する平面波を表す解で, \vec{E}_0, \vec{k} は定ベクトル, ω は角振動数を表す正の定数である。 \vec{k} の大きさを k とし, k と ω の関係を求めよ。

4. 式 (2) で表される \vec{E} は, その振動方向が波の進行方向と互いに直交することを示せ。
5. 式 (2) で表される \vec{E} に対応して発生する \vec{B} を導け。ただし, デカルト座標を用いて $\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0), \vec{k} = (0, 0, k)$ とする。

B. 誘電率 ϵ の一様な媒質中の電磁場について考える。

1. まず、物質中の一つの電子に注目する。 x 方向に振動する電場 $E = E_0 \sin \omega t$ のみがあるときに、ある点を中心に電子は単振動をしていた。振動の中心を原点にとり、時刻 t の電子の x 方向の変位を求めよ。ただし、電子の電荷を $-e$ 、質量を m とする。
2. 単位体積当たり N 個の電子が、1. と同じ振動をする電場中で同じ運動をする状況を考える。電子間の相互作用は無視できるものとする。このときの単位体積当たりの平均電気双極子モーメント (分極) の大きさ P は χ_e を電気感受率として、 $P = \epsilon_0 \chi_e E$ と表される。また、物質の屈折率 n は $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$ と表される。 n を ω の関数として表せ。なお、電束密度 \vec{D} と分極 \vec{P} には $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ の関係がある。
3. 物質の屈折率 n が虚数になる ω の条件を求めよ。
4. 屈折率が虚数になると、その物質に入射する電磁波は、入射角によらずに全反射を起こすことが知られている。前問までに考えた電子の集団運動が現実の電離層で起こるものと仮定する。平面波とみなせるラジオ波が、電離層に入射する際に全反射を起こすために必要な電離層の電子密度を概算せよ。ここでのラジオ波の振動数は 6.00×10^5 Hz とする。また、 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m である。