平成１２年度自然科学研究科
博士前期課程学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

試験時間 12:30 〜 16:30

注意事項

1. 問題 **I, II, III, IV** すべてを解答すること。
2. 問題 **I, IV** は 1 ページ, **II, III** は 2 ページである。
3. 解答は, 各問題ごとに別の答案用紙を使用し, 1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
4. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号, 受験番号および氏名を必ず記入すること。
5. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

以下の問いに答えよ。

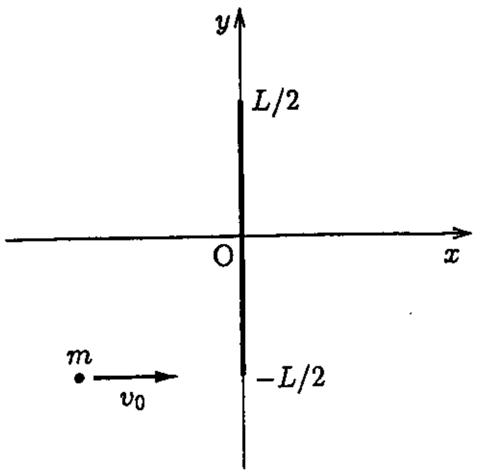
1. 重力と速度に比例する抵抗を受けて物体が落下している。このとき, 運動方程式は

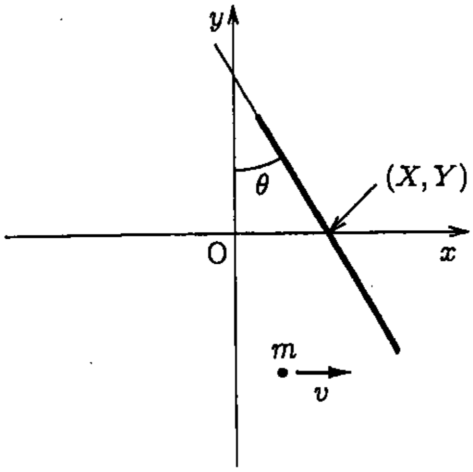
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\gamma\frac{dx}{dt} - mg$$

   となる。一般解を求めよ。

2. 滑らかな水平面上に x 軸がある。この軸上での運動を考える。この軸上の原点, および $x = \ell$ の点に質量 m の質点を置き, 質量を無視できる長さ ℓ, 強さ $m\omega^2$ のバネでつなぎ静止させておく。そこへ x 軸の負の方向から質量 m の質点が速さ v_0 で入射し, $t = 0$ で原点で完全弾性衝突したとする。その後の運動を解け。

3. 滑らかな水平面上に xy 軸がある。質量 M, 長さ L の一様な棒を, この y 軸上に重心が原点に一致するように横たえて静止させておく。そこへ x が負の方向から x 軸に平行に質量 m の質点が速さ v_0 で入射して, $t = 0$ で $x = 0, y = -L/2$ の点で完全弾性衝突する。衝突後も質点の y 方向の速さは 0 とする。下図のように, 棒の重心の座標を (X, Y), 棒と y 軸のなす角を θ とする。衝突の前後で, 運動量, エネルギー, 原点の回りの角運動量が保存することを表す式を書き, その後の運動を解け。





II

真空中 (誘電率 ε_0) に、間隔 d で平行に半径 a の2枚の金属円板がおかれている。各金属円板 (極板) は $\pm Q_0$ の電荷で帯電している。時刻 $t=0$ で、両極板の中心を抵抗 R の2本の細い針金で図1のように（1本は極板内で極板に垂直に、もう一本は極板外で極板の十分遠方を通るように）つないだ時、極板間に蓄えられていた電場のエネルギーがどのように移動していくかについて考えよう。ここで極板は十分大きいので $(d << a)$ 円板端での電場の乱れは無視でき、また抵抗は十分大きいので極板から電荷が減少する速さは緩やかであり、周りに生じる電場は各瞬間に極板の持つ電荷の作る静電場と同じでありインダクタンスの効果も無視できるとする。

1. 2枚の金属円板 (極板) はコンデンサーと見ることができる。ガウスの法則を用いて、このコンデンサーの静電容量 C を求めよ。

2. この系は、図2のような、並列につながれた2つの抵抗とコンデンサーからなる RC 回路と等価である。時刻 t における極板の電荷 $Q(t)$ を、t の関数として表せ。

3. 極板の電荷が時間と共に変化すると、極板間の電場が変化し極板間に変位電流（密度）$j_{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ が発生する。変位電流密度の方向を述べ、その大きさ $j_{\mathrm{D}}(t)$ を $\dot{Q}(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$ を用いて表せ。

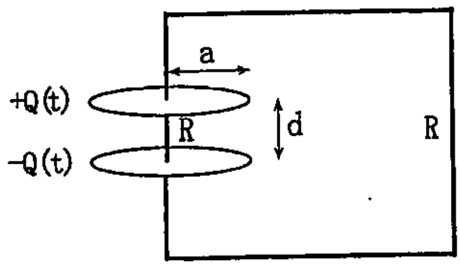


図1

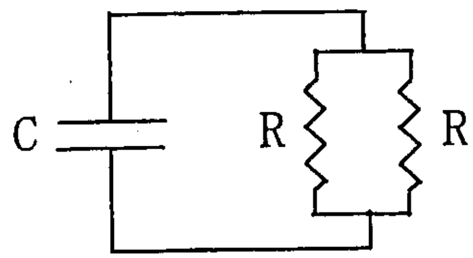


図2

4. 変位電流がある場合の真空中でのアンペールの法則は、次式で与えられる。

$$\int \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{D}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

ここで左辺は閉曲面の縁での線積分、右辺はその閉曲面での面積分を表し、$\boldsymbol{H}$ は磁場、$\boldsymbol{j}$ は真の電流密度である。極板内の針金を通る電流は $-\frac{\dot{Q}(t)}{2}$ であることに注意して、時刻 t において極板間に発生する磁場の大きさ $H(r,t)$ を $\dot{Q}(t)$ を用いて表し、その方向について述べよ。但し、r は中心を通る針金からの距離である。磁場の方向が反転する r の値はいくつか。

5. ポインティングベクトル $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ は、単位時間あたりに単位面積を通過するエネルギーの流れを表す。問4の r の位置でのポインティングベクトルの大きさ $S(r,t)$ を求め、その方向について述べよ。

6. 極板内に円筒面（中心軸からの半径 r、極板方向に高さ d）を考え、その円筒面上で $S(r,t)$ の和を取り $r \to 0$ または a とすることで、単位時間あたりに、極板内の針金に流れ込むエネルギー $J_1(t)$ とコンデンサーの側面から流れ出るエネルギー $J_2(t)$ を、$Q(t)$、$\dot{Q}(t)$ を用いて表せ。この結果から、$J_1(t)$、$J_2(t)$ はそれぞれどんなエネルギーに変化しているのかを説明し、問 4 で求めた磁場の方向が反転する r の値の妥当性を論ぜよ。

III

量子力学では，物理量は演算子に対応させせられ，観測値は（適当な境界条件の下で）固有関数に応じた，演算子の固有値として記述される。演算子は，一般には無限次元（無限行無限列）の行列と見なすことができる。事実，正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{1}$$

を満足するような有限行列 $\hat{x}$, $\hat{p}$ は存在しないことを示すのは難しくない。よく知られているように，演算子が作用する空間をうまくとれば，$\hat{x}, \hat{p}$ は微分演算子としても表現できる。角運動量演算子の場合，軌道角運動量演算子 $\hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$ は同様の意味で無限次元行列であるが，スピン演算子は有限次元の行列で表現できる。スピン 1/2 の場合は特に簡単で，スピン演算子の z 成分 $\hat{S}_z$ が $\pm\frac{\hbar}{2}$ の値をとることは，2 行 2 列の Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いて，以下のように表現できる。

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

これは，$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ $\hat{S}_z$ の固有値 $+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$ に対応する固有関数であることを示している。σ_1，σ_2 から作られた演算子 $\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$ は，それぞれ β を α に，α を β に移す作用をすることもわかる。また，演算子同士は一般には交換可能ではないが，これは行列の積が交換可能ではないことに対応する。実際，行列の積を計算すると

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1 \tag{5}$$

等となる。スピンが関与していない部分に関しては，単位行列 $\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，しばしば省略される。

以上をふまえて，Hamiltonian が次式で与えられるような，スピン 1/2 を持つ粒子の一次元運動を考える。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2 + \hat{W}^2 + \hbar\sigma_3 \frac{d\hat{W}}{dx}\right] \tag{6}$$

ここで，$\hat{W} = \hat{W}(x)$ は x の実関数であるとする。このとき，Hermite 演算子 $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ を

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{4m}}(\sigma_1\hat{p} + \sigma_2\hat{W}), \qquad \hat{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{4m}}(\sigma_2\hat{p} - \sigma_1\hat{W}) \tag{7}$$

のように導入すると，

$$\hat{Q}_1\hat{Q}_2 + \hat{Q}_2\hat{Q}_1 = 0 \tag{8}$$

IV

次の問に答えよ。

1. 2原子分子が巨視的な数 N 個集まった気体が、体積 V の箱につめられている。この系の定積熱容量 C_V を、エネルギー等分配則を用いて考える。

    (1) 室温付近では分子の並進と回転の自由度が生きている。C_V を求めよ。

    (2) 温度を上げると2原子間距離の振動の自由度も生きてくる。C_V を求めよ。

    (3) さらに高温にすると、2原子分子は2個の独立な原子に解離してしまった。C_V を求めよ。

2. ある要素はエネルギーが低い状態 $(-\varepsilon_0)$ と高い状態 (ε_0) の2つの状態をとる。この要素が巨視的な数 N 個集まった体系の熱容量 C_N を、温度の関数として計算せよ。要素間の相互作用は無視できるとする。

3. 量子力学によると1個の調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と与えられる。この振動子が巨視的な数 N 個集まった体系が温度 T の熱平衡状態にある。体系中のある振動子 i に着目したとき、それが量子数 n_i を持つ確率 $\rho(n_i)$ を温度の関数として計算せよ。振動子間の相互作用は無視できるとする。

4. 自由電子ガスの熱容量 C_V は、低温で絶対温度 T に比例する。その理由を、図や数式を用いて定性的に説明せよ。説明には次の内容を含めること。

    (1) フェルミ面はなぜ形成されるか。

    (2) 電子の熱励起の仕方は、古典自由粒子系と比べてどう異なるか。

    (3) 1電子状態密度曲線およびフェルミ分布関数の概形を図示せよ。

    (4) 化学ポテンシャルの温度依存性の効果はどう寄与するか。

が成立する。さらに，$\hat{Q}_1$，$\hat{Q}_2$ から

$$\hat{Q}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_1 \pm i\hat{Q}_2) \tag{9}$$

を定義すると，

$$\hat{Q}_+^2 = 0 = \hat{Q}_-^2 \tag{10}$$

が成立する。以下の問いに答えよ。ただし，答案では，演算子の記号ˆを省略してもかまわない。また，解答は必ずしも 1., 2., 3., 4. の番号順にしなくてもかまわない。

1. (1) Hamiltonian $\hat{H}$ を $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ を用いて表わし，$\hat{H}$ は $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ と可換であることを示せ。

   (2) Hamiltonian $\hat{H}$ は $\hat{Q}_+, \hat{Q}_-$ を用いて $\hat{H} = \hat{Q}_+\hat{Q}_- + \hat{Q}_-\hat{Q}_+$ と表わせることを示せ。

2. 1. の結果から $\hat{H}$ は $\hat{Q}_\pm$ と可換である。$\hat{H}$ は $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$ とも可換であるから，$\hat{H}$ と S_z を同時対角化する表示 $|n, \pm\rangle$ がとれる。ここで，エネルギー固有値は $E_n^\pm$，スピンの z 成分を $\pm\frac{\hbar}{2}$ とする。

   (1) $\hat{Q}_+|n, +\rangle = 0 = \hat{Q}_-|n, -\rangle$ を示せ。

   (2) $E_n^\pm > 0$ のとき，$\frac{1}{\sqrt{E_n^\pm}}Q_\mp|n, \pm\rangle$ は $|n, \pm\rangle$ と同じエネルギー準位 $E_n^\pm$ を持つ規格化された状態であることを示せ。

3. (1) エネルギー固有値がゼロの状態を $|0, \sigma\rangle$ と書くとき $(\sigma = \pm)$，$|0, \sigma\rangle$ が基底状態であるために，波動関数 $\psi_\sigma(x) = \langle x|0, \sigma\rangle$ が満たすべき方程式は

$$\frac{d\psi_\sigma(x)}{dx} = \frac{1}{\hbar}W(x)\sigma_3\psi_\sigma(x) \tag{11}$$

   であることを示せ。

   (2) 関数 $\hat{W}$ が無限遠 $x \to \pm\infty$ で (a) $\hat{W}(x) \to x^{2n+1}$, (b) $\hat{W}(x) \to x^{2n}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の様に振る舞うとき，規格化可能な基底状態は存在するかどうか答えよ。

4. 特に，$\hat{W}(x) = m\omega x$ の場合，つまり，

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_3 \tag{12}$$

   を考える。このとき，

   (1) 基底状態の波動関数を求めよ。なお，規格化の数係数は計算しなくてよい。((11) 式を用いても良い。)

   (2) 系のエネルギー準位はどうなるか答えよ。縮退度も考察せよ。