平成１３年度自然科学研究科（博士前期課程）

学力試験問題

（理化学専攻・物理学系）

専門科目（物理学）

試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 **I, II, III, IV** をすべてを解答すること。
2. 問題 **I, II, III, IV** はそれぞれ１ページである。
3. 解答は各問題ごとに別の解答用紙を使用し、１枚の解答用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
4. 各解答用紙の所定欄に、問題番号、受験番号を必ず記入すること。
5. 別途配布する計算用紙は回収しない。

I

図 1-1, 1-2 で与えられる一様重力下での質点の振動に関して、以下の **1.** ~ **4.** に答えなさい。ただし重力加速度を g とし、振動は各図で紙面で与えられる鉛直平面内に限られているとする。

図 1-1 のように質量 m の質点が、長さ l の質量の無視できる棒で上からつるされて振動する。

1. この場合に角度 θ の運動方程式を求めなさい。ただしこの場合振動は必ずしも微小振動で近似できないとする。

質量 m_1, m_2 の 2 つの質点が図 1-2 のように長さ l_1、l_2 の質量の無視できる棒で上からつるされて振動する。またこの場合は、振動は微小振動で近似できるとする。

2. 角度 θ_1, θ_2 にたいして運動方程式を求めなさい。(微小振動の近似を用いて良いことに注意すること。)

図 1-2 で特に $m_1 = m_2$、$l_1 = l_2 = l$ の場合には角度 θ_1, θ_2 にたいしての運動方程式は

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{g}{l}(-2\theta_1 + \theta_2)$$
$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{g}{l}(2\theta_1 - 2\theta_2)$$

となる。

3. これらの運動方程式を解くと固有振動が 2 つ得られるが、これらの固有振動数を求めなさい。

4. また、角度 θ_1 が最大になる瞬間の固有振動の様子を図示しなさい。

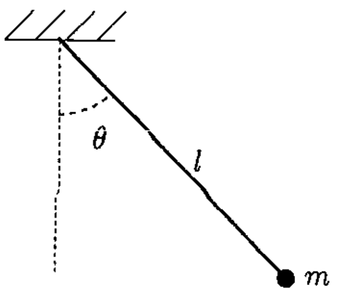


図 1-1

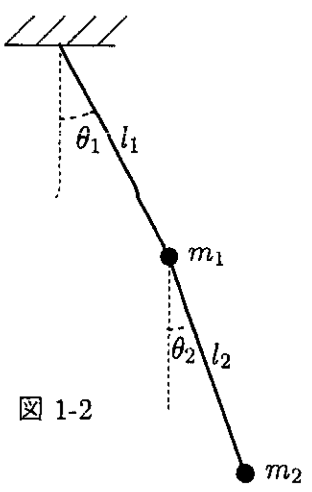


図 1-2

II　次の 1.～ 3. の各問を答えなさい。

1. 表面電荷密度 σ で一様に分布している平面を考える

(1) 平面が無限平面であるとき、平面上の任意の面積を考えて、平面上での電場の大きさとその方向を求めよ。

(2) 平面が半径 a の円板であるとき、中心軸上で距離 R 離れた P 点の電場の大きさとその方向を求めよ。(図 2-1 参照)

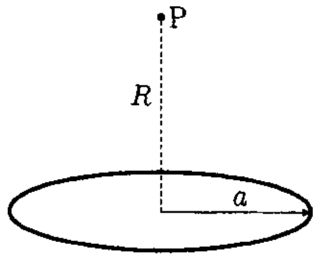


図 2-1

2. 長さ $2l$ の直線を考え、ここに一定の電流 I を流す。

(1) 直線の中心から、直線に垂直方向に距離 R にある点 P での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。(図 2-2 参照)

(2) 次に、直線の長さ l を無限大にしたときの同じ P 点での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

3. 無限長の直線に電流 I を流し、$a \times b$ の長方形のコイルを図 2-3 のように下辺が $y = c$ の位置に置く。但しコイルと直線はつねに同一平面内にあるものとする。

(1) 直線に流す電流を $I = I_0 \cos \omega t$ と時間変化させたときのコイルに生ずる起電力 V を求めよ。

(2)　次に直線に流す電流を 一定値 I_0 として、コイルを $-y$ 方向へ一定速度 v で動かすとき、下辺が $y = c/2$ 点を通過する瞬間でのコイルに生じる起電力 V を求めよ。

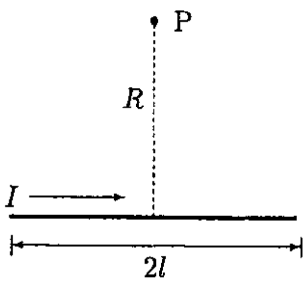


図 2-2

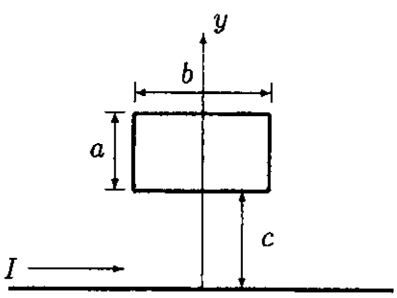


図 2-3

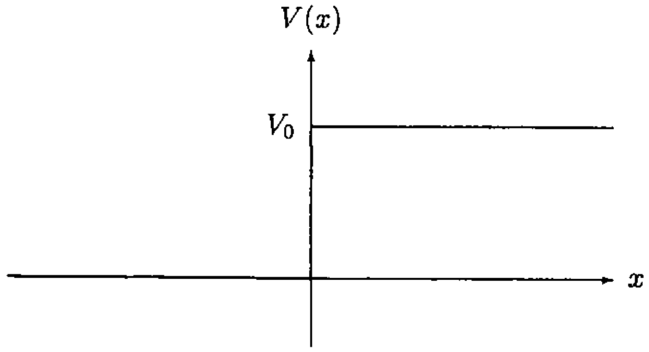
III　次の 1.~ 2. の各問を答えなさい。

1. 図 3-1 のような階段型のポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \mathrm{x} > 0 \\ 0 & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$$

による粒子の 1 次元的な散乱を考える。
$x = -\infty$ からエネルギー $E(> V_0)$ の平面波が入射して来たとして、以下の問に答えよ。
(1) シュレーディンガー方程式を解いて反射波と透過波を求めよ。
(2) 確率保存の方程式から確率の流れの密度 $j(x,t)$ の表式を求め、入射波、　反射波、透過波に対する確率の流れの密度を求めよ。
(3) 反射係数、透過係数を求めよ。

図 3-1



2. ハミルトニアン $\hat{H}_0$ が 2 重に縮退した 1 つのエネルギー固有値 E_0 を持つような、すなわち、 2 重に縮退した $\hat{H}_0$ の固有状態を $|\,1>$ および $|\,2>$ とすると、

$$\hat{H}_0\,|\,1>= E_0\,|\,1>,\ \hat{H}_0\,|\,2>= E_0\,|\,2>$$

が成り立っているような量子系を考える。
この量子系に状態 $|\,1>$ と $|\,2>$ とを互いに遷移させる相互作用 V:

$$\hat{V}\,|\,1>= \lambda\,|\,2>, \hat{V}\,|\,2>= \lambda\,|\,1>$$

が働くと、2 重に縮退した $\hat{H}_0$ の固有状態の縮退は解かれる。以下の問に答えよ。
(1) 全ハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ のエネルギー固有値を求めよ。求めたエネルギー固有値に対応する規格化されたエネルギー固有状態を、状態 $|\,1>$ と $|\,2>$ の一次結合として求めよ。
(2) この量子系が時刻 $t = 0$ において状態 $|\,1>$ にあったとする。時刻 t における状態を求めよ。この結果を用いて、時刻 t においてこの量子系の状態が $|\,1>$ または $|\,\cancel{1}\ 2>$ にある確率をそれぞれ求めよ。またそれらを図示せよ。
(3) このような簡単なハミルトニアンで良い近似で、また系の本質的な振る　舞いを記述することが出来る現実的な量子系が沢山存在する。そのような量子系の具体例を 1 つ述べて説明せよ。

IV　次の 1.〜6. を答えよ。

一辺 L のマクロな大きさの立方体の箱（体積 $V=L^3$）の中に、質量 m の古典自由粒子がマクロな数 N 個入っている。ハミルトニアンは

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$$

である。

1. 箱が温度 $\beta = 1/kT$ の熱浴に囲まれているとして、カノニカル分布の分配関数

$$Z(N,\beta,V) = \frac{1}{N!\,h^{3N}} \int \mathrm{d}\mathbf{q}_1 \mathrm{d}\mathbf{q}_2 \cdots \mathrm{d}\mathbf{q}_N \int \mathrm{d}\mathbf{p}_1 \mathrm{d}\mathbf{p}_2 \cdots \mathrm{d}\mathbf{p}_N \, e^{-\beta H_N}$$

を計算せよ。

2. ギブスのパラドクスとは何か、この問題に即して簡単に説明せよ。

3. この系のヘルムホルツの自由エネルギー $F(N,T,V)$ を求めよ。結果は、F の示量性が明示的となる形に整理すること。

4. この系の内部エネルギー $E(N,T,V)$ を計算し、その結果をエネルギー等分配則を用いて説明せよ。

次に、箱の中に入っているのが量子論的自由粒子である場合を考える。周期境界条件で 1 粒子のシュレディンガー方程式を解くと、固有エネルギーと固有関数は、それぞれ

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \qquad \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

と求められる。ただし、$n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \ (i=1,2,3)$ として、

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$$

である。

5. 粒子が 1 個である場合、積分移行

$$\sum_{\mathbf{k}} \cdots \quad \Longrightarrow \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\mathbf{k} \cdots$$

を用いてカノニカル分布の分配関数 $Z(1,\beta,V)$ を計算し、古典論での結果と比較せよ。また、積分移行が使えなくなるのはどういう場合か、簡単に述べよ。

6. 粒子が複数個入っている場合は、古典自由粒子系と異なり、N 粒子系に対する公式

$$Z(N,\beta,V) = \frac{1}{N!}[Z(1,\beta,V)]^N$$

を用いて分配関数を計算するわけにはいかない。ボーズ粒子系、フェルミ粒子系のそれぞれについて、この公式がどう破綻するか、具体的に説明せよ。

以下の公式は証明なしに用いてよい。積分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0)$$

スターリングの公式：

$$\ln n! = n \ln n - n \quad (n \gg 1)$$