平成 ~~13~~ 14 年度自然科学研究科
博士前期~~過~~課程学力検査問題
（理化学専攻・物理学系）

専門科目（物理学）

試験時間：12:30～16:30

注意事項

1. 問題すべてを解答すること。
2. 問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲは 1 ページ、Ⅳは 2 ページである。
3. 解答は、各問題に別々の答案用紙を使用し、1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
4. 各答案用紙の所定欄に、受験番号、氏名および問題番号を必ず記入すること。一つの問題の解答に複数の答案用紙を使用する場合には問題番号に、例えば、Ⅳ-1，Ⅳ-2 のように記入すること。
5. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

滑らかな水平の板に開けられた滑らかな縁を持った穴に長さ l の十分に長い糸を通し、その上端に質量 m の質点1、下端に質量 M の質点2を結びつけた。質点1は水平板上を運動しており、質点2は鉛直方向にのみの運動をしている。この運動中糸は常に弛まないとして以下の問に答えよ。

1. 図のように穴を原点として、穴から下端の質点1までの距離を z 、水平板上にある質点1の位置を極座標 (r, θ) で表わしたときの系のラグランジアンを求め、運動方程式を導け。

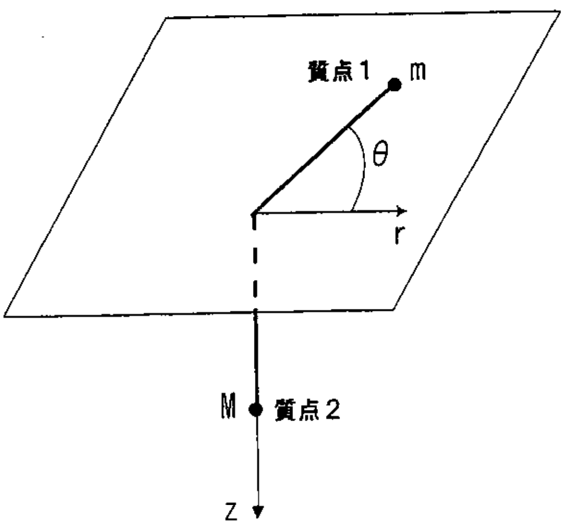
2. 質点1が $(r, \theta) = (d, 0)$ の位置にあるときに水平面内を糸と直角方向に初速度 v_0 で運動していたとして、その後の運動の様子を以下の小問に従って調べよ。

   (a) 運動の様子は r の変動という一次元問題に帰着できる。$\dot{r}^2$ を与える式を導きこの事を示せ。

   (b) 上で求めた式の符号や、図を用いてポテンシャルの形状を議論する事により、質点の運動の様子を論ぜよ。

3. 質点2がほぼ釣り合いの位置にあって上下動しない場合の質点1の回転の周期を m, M, d を用いて表せ。

4. 質点2がほぼ釣り合いの位置にあって微小振動している時の質点2の振動の周期を求めよ。m, M, d で表せ。



II

1. 真空中に置かれた無限の長さの半径が a, b の同軸導体円筒 $(a < b)$ について考える。真空の誘電率を ϵ_0 として以下の問いに答えよ。

   (a) 内側陽極、外側陰極として単位長さあたり λ の電荷を与えたとき、中心軸から r $(a < r < b)$ の点での電場 E の大きさを求めよ。

   (b) 単位長さあたりの静電容量を求めよ。

2. 真空中の電子の運動を考える。以下の設問について答えよ。ただし、電子の速度 v は光速に比べて十分小さいとしてよい。

   (a) 一様な電場 E が y 軸方向にかかっている空間中で、質量 m、電荷 $-e$ の電子が x 軸方向に初速 v_0 で打ち出されたときの運動について、運動方程式を立て、これを解いて軌跡を図示せよ。

   (b) 大きさ B の一様な磁場が z 軸方向にかかっているとき、2-(a) と同じ初期条件の電子の運動について同様に解き、軌跡を図示せよ。

   (c) z 方向に大きさ B の一様な磁場と y 方向に大きさ E の一様な電場がかけられている空間に、2-(a) と同じ初期条件の電子の運動について解き、軌跡を図示せよ。

III

以下の問題 1 及び問題 2 を解答せよ。

問題 1　一次元の無限に高い箱形ポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<L\\ \infty, & x\le 0,\ \ L\le x\end{cases}$$

における質量 m の粒子の量子力学的運動を考える。

1. シュレディンガー方程式を解き、エネルギー固有値および規格化された固有関数を求めよ。

次に、時刻 $t=0$ において、粒子が波動関数

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{L}}\sin\dfrac{2\pi x}{L}, & 0\le x\le L/2\\ 0, & x\le 0,\ \ L/2\le x\end{cases}$$

で記述される状態にあったとして、以下の問に答えよ。

2. 時刻 $t=0$ において粒子のエネルギーを測定したとき、1. で求めたエネルギー順位の基底状態にある確率を求めよ。
3. 時刻 $t>0$ において粒子のエネルギーを測定したとき、基底状態にある確率がどうなるか、理由を付けて述べよ。

問題 2　電子はスピン $\hbar/2$ を持った粒子である。電子の軌道角運動量を $\boldsymbol{L}$、スピン角運動量を $\boldsymbol{S}$、全角運動量を $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ とする。以下では、電子が軌道角運動量の 2 乗 $\boldsymbol{L}^2$ が $2\hbar^2$ の固有状態にあるものとして、以下の問に答えよ。

1. この状態にある電子が取る L_z の固有値および $\boldsymbol{S}^2$ の固有値はいくらか記せ。
2. この電子が取る全角運動量の z 成分 J_z の固有値を全て記せ。また、それぞれの固有値に属する固有状態を L_z 及び S_z の固有状態で表せ。
3. この電子の全角運動量の 2 乗 $\boldsymbol{J}^2$ の固有値はいくつといくつか記せ。

電子の軌道運動とスピンとの間にはハミルトニアン

$$H_{LS}=\lambda\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$$

で表されるスピン－軌道相互作用が存在する。ここで、λ は簡単のため定数とする。

4. $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{J}^2$、$\boldsymbol{L}^2$ および $\boldsymbol{S}^2$ で表せ。
5. スピン一軌道相互作用ハミルトニアン H_{LS} の固有値を求めよ。

このような軌道－スピン相互作用は、例えばカリウムやナトリウムのように閉殻の外に電子が 1 個ある水素類似原子において存在する。電子がスピンによる磁気能率を持つので、原子核と殻内電子がつくる静電場の中を軌道運動することにより電子が感じる磁場とこの磁気能率との間に相互作用が働くわけである。ナトリウムの D 線のわずかな分離はこのスピン－軌道相互作用により説明される。

IV

少数の自由フェルミ粒子を中に含むミクロな大きさの要素がある。この要素は、２重縮退した基底状態と第１励起状態の３つのエネルギー準位

$$\varepsilon_l = \begin{cases} 0 & (l = 1, 2) \\ \Delta & (l = 3) \end{cases}$$

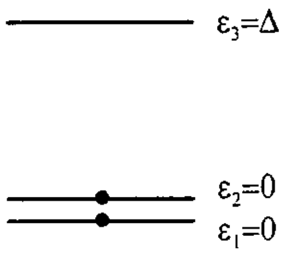
を持ち、その中に２個のフェルミ粒子が入っているとする。フェルミ粒子はパウリ原理に従って各準位を占有するが、粒子間の相互作用は無視できるとする。 $\Delta > 0$ である。この要素が N $(\gg 1)$ 個集まった体系が、温度 $\beta = 1/kT$ の熱平衡状態にある。各要素は空間的に固定されており、また要素間の相互作用は無視できるとする。この体系の統計熱力学について考察したい。

まず、この問題に現われる、統計力学の幾つかの概念や公式を思い出そう。

1. パウリ原理とは何か、その概念を１行から３行程度の文章で簡単に説明せよ。
2. １要素のとる微視状態を s $(s = 1, 2, \cdots)$、そのエネルギーを E_s として、１要素の分配関数 $Z(1, \beta)$ の式を書け。
3. N 要素からなる体系の分配関数 $Z(N, \beta)$ を、$Z(1, \beta)$ を用いて表す式を書け。要素間の相互作用は無視できるとする。
4. 体系の内部エネルギー E を分配関数 $Z(N, \beta)$ から導く式を書け。

さて、要素の中のフェルミ粒子が内部自由度（スピン）を持っていないという仮想的な場合について考える。次の問に答えよ。

5. １要素が取るすべての微視状態を図を用いて書き下し、それぞれのエネルギーを求めよ。微視状態は全部で３つある。そのうち例えば、$l = 1$ と 2 の準位に粒子が１個ずつ入った状態は、「•」という記号を用いて



   のように図示される。下の２準位に便宜上狭い間隔が付けてあるが、この２準位は縮退しておりエネルギー差はない。

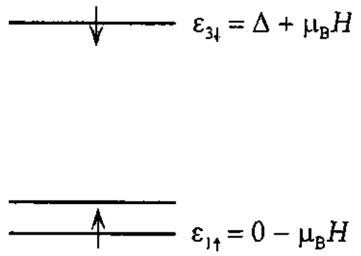
6. １要素の分配関数 $Z(1, \beta)$ を計算せよ。
7. この要素が N 個集まった体系の内部エネルギー E を計算せよ。
8. この体系の熱容量 C_N を計算せよ。

次に、中に入っているフェルミ粒子が電子（スピン 1/2 のフェルミ粒子）である場合について考える。電子間の相互作用は無視する。外部磁場 H をかけると、磁場に対して上向きスピン（$\sigma = +1$)、下向きスピン（$\sigma = -1$) の電子のエネルギーは、それぞれ

$$\varepsilon_{l\sigma} = \varepsilon_l - \sigma\mu_B H \qquad (\sigma = \pm 1,\ l = 1, 2, 3)$$

と変化することを考慮して、次の問に答えよ。μ_B は定数である。磁場は十分弱い ($\mu_B H \ll \Delta$) と考えてよい。

9. 磁場 H のもとで 1 要素が取るすべての微視状態を、図を用いて書き下し、それぞれの状態のエネルギーを求めよ。微視状態は全部で 15 個ある。そのうち例えば、$l = 1$ と 3 の準位にそれぞれ上向きスピン ↑、下向きスピン ↓ の粒子が入った状態は、次のように図示される。



この状態のエネルギーは、$\varepsilon_{1\uparrow} + \varepsilon_{3\downarrow} = (0 - \mu_B H) + (\Delta + \mu_B H) = \Delta$ である。

10. 1 要素の分配関数 $Z(1, \beta, H)$ を計算せよ。

11. この要素が N 個集まった体系の、磁場 $H \to 0$ での磁化率

$$\chi(T) = \lim_{H\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{T,N}$$

を計算せよ。ここで M は、$Z(N, \beta, H)$ を体系の分配関数として、

$$M = \frac{\partial}{\partial(\beta H)}\ln Z(N, \beta, H)$$

によって計算される体系の磁化である。

12. この $\chi(T)$ の式に現われる Δ をすべて $-\Delta$ に置き換えると、基底状態は縮退しておらず、第 1 励起状態が 2 重縮退した要素からなる体系の、磁化率の温度依存性の表式が得られる。さて、この磁化率の低温での温度依存性は、前問 (11) の磁化率の低温での温度依存性と、定性的に全く異なっている。どのように異なるか、またその物理的理由は何か、3 行から 10 行程度の文章で簡単に説明せよ。必要なら式や図を含めてよい。