平成１６年度自然科学研究科
博士前期課程学力検査問題
(理化学専攻・物理学系)

専門科目 (物理学)

試験時間 12:30 ～ 16:30

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV すべてを解答すること。
2. 解答は, 各問題ごとに別の答案用紙を使用し, 1 枚の答案用紙に複数の問題の解答を書いてはいけない。
3. 各答案用紙の所定欄に, 問題番号および受験番号を必ず記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

質量 m の小球が，$V(x) = -\dfrac{2a}{x} + \dfrac{b}{x^2}$ というポテンシャル（但し a, b は正の定数）で与えられる力を受けて x 軸上を運動している。小球は $x > 0$ の領域を運動するものとし，小球の大きさは無視できるものとして，以下の問に答えよ。

1. $x > 0$ の領域でポテンシャル $V(x)$ の最小値を与える x の値 x_0 及びその最小値 $E_{\min}$ を求めた上，x を横軸に取ってポテンシャル $V(x)$ の概形をグラフに表せ。$x > 0$ の領域のみでよい。

2. この小球についての運動方程式を書き下せ。

3. 小球の持つ力学的エネルギーを E とする。小球の運動が束縛されるための E の範囲を書け。

4. 小球のエネルギー E が前問 **3.** の範囲にあるとき，小球が最も原点に近づく点 $x_{\min}$ 及び最も遠ざかる点 $x_{\max}$ を，E 及び他の与えられた定数を使って表せ。

5. 小球の運動が束縛されている場合について，小球が位置 x（但し $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$）にあるときの小球の速さを，$E, x$ 及び他の与えられた定数を使って表せ。

6. 小球の運動が束縛されている場合，小球は $x_{\min}$ と $x_{\max}$ の間を周期運動する。その周期を E 及び他の与えられた定数を使って表せ。但し，必要ならば次の公式を用いてよい。

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \pi \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (\alpha < \beta)$$

II

図 1 に示すように, 誘電率 ε, 電気伝導率 σ の一様な物質を円柱形にして, その軸に垂直な上下の面 A,B に A,B と同型の円形電極をそれぞれ付けた。電極および円柱物質の半径を a, 電極の間隔を d とする。この物質の詰まった電極 A,B は平行平板コンデンサーと見なすことができ, その電気容量を C とする。さらに, 電極 A,B 間には円柱物質を通して電流が流れ, 電気抵抗 R を示す。簡単化のために, 電極間の物質と電極との間の接触抵抗および以下の問題で外部からつなぐ電源の内部抵抗は考えなくてよい。また, 電場は円柱物質の内部にのみ存在し端の効果は無視できるものとして以下の設問に答えよ。なお, 物理量を表す記号は, 設問中で与えられたものだけを用いて解答すること。

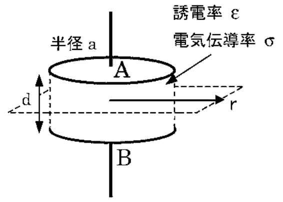


図 1

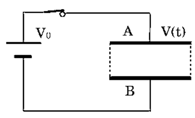


図 2

1. 図 2 のように電極 A,B 間に電源をつないで直流電圧 V_0 $(V_0 > 0)$ を加えて十分な時間が経過したところ, 円柱物質に一様な定常電流 I_0 が流れた。このとき, 図 1 に示したように, 円形電極に平行な両極から等距離にある平面上において, 円形電極の中心軸から距離 r における磁場の強さ $H(r)$ を求めよ。また, $H(r)$ の概略をグラフに図示せよ。

2. その後, 時刻 $t = 0$ でスイッチを切り電源を切り離した。時刻 t における電極 A,B 両端の電位差 $V(t)$ を V_0, R, C, t を用いて表せ。

3. 電気容量 C, および電気抵抗 R をそれぞれ ε, σ, a, d から必要なものを用いて表せ。また, 電気容量と電気抵抗の積 RC を誘電率 ε と電気伝導率 σ だけを用いて表せ。

4. 上の問 **2** の条件下において, 円柱物質内の電場の強さ, 伝導電流密度、変位電流密度を求め、それぞれの向きを解答用紙の図中に矢印で記せ。このとき, 図 1 に示したように, 円形電極に平行な両極から等距離にある平面上において, 円形電極の中心軸から距離 r における磁場の強さ $H(r, t)$ はどうなるか。伝導電流、変位電流がともに存在することに注意して答えよ。

5. 次に, いったん電極 A,B を短絡し蓄積していた電荷を放電した後に, 図 3 のように交流電源に接続した。電極間に交流電圧 $V_0 \cos \omega t$ を加えた時に回路を流れる交流電流 $I(t)$ の振幅を求めよ。

6. 図 3 において, この交流電圧の角振動数 ω を変化させて電流 $I(t)$ の測定を行い, $\omega = 0$ のときの電流 I_0 の $\sqrt{2}$ 倍の振幅をもつ交流電流が流れる角振動数 ω_c を求めた。ω_c を C と R を用いて表せ。

7. 電極間の物質の電気伝導率 σ の値がすでに分かっているとき, この物質の誘電率 ε は円柱のサイズに依らず σ と ω_c のみで表すことができることを示せ。

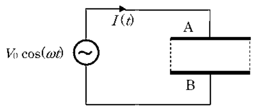


図 3

III

図の実線で示したような, 無限に高い壁で囲まれた一次元の箱のなかに, 束縛されたひとつの粒子を考える。すなわち, ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < a) \\ +\infty & (\text{それ以外の領域}) \end{cases}$$

と記述される。粒子の質量は m とし, プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ として, 以下の問に答えなさい。

1. すべてのエネルギー固有値を求めよ。

2. 上記 **1.** で求めたエネルギー固有値に対応する規格化固有関数を求めよ。

3. ここへ, 図の破線で描いたような, 箱の中の半分の領域 $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ でのみ大きさ V_0 で働く摂動 $V'(x)$ を考える。すなわち,

$$V'(x) = \begin{cases} V_0 & (0 \leq x \leq \frac{a}{2}) \\ 0 & (\text{それ以外の領域}) \end{cases}$$

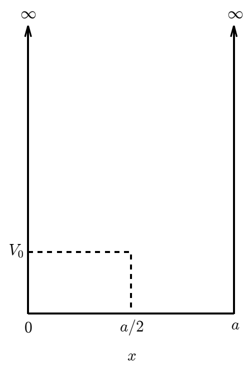
と記述される。ここで V_0 は定数である。

一次摂動の範囲で基底状態の固有エネルギー値の変化 $\Delta E_0^{(1st)}$ を求めよ。

4. 一次摂動の範囲で第一励起状態の固有エネルギー値の変化 $\Delta E_1^{(1st)}$ を求めよ。

5. ここで用いた **3.4.** のような摂動計算が良い近似を与える条件を $\hbar, m, a, V_0$ を用いた不等式で表せ。

6. 今, 基底状態のエネルギー値に対する二次摂動の効果, すなわち $\Delta E_0^{(2nd)}$ を考える。簡単のため, 中間状態としては, 第一励起状態からの影響のみ考え, その上の励起状態の影響は考えないことにする。この扱いの範囲で $\Delta E_0^{(2nd)}$ を求めよ。



IV

体積 V の 3 次元の巨視的な大きさの箱の中に，質量 m の古典自由粒子が巨視的な数 N 個入っている。この系のハミルトニアンは，各粒子に番号 i $(i = 1, \cdots, N)$ を付け，その運動量を $\mathbf{p}_i$ とすると，

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \tag{1}$$

と与えられる。

1. 体系の温度を T $(\beta = 1/kT)$ として，カノニカル分布の分配関数

$$Z(N, \beta, V) = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int \mathrm{d}\mathbf{q}_1 \mathrm{d}\mathbf{q}_2 \cdots \mathrm{d}\mathbf{q}_N \int \mathrm{d}\mathbf{p}_1 \mathrm{d}\mathbf{p}_2 \cdots \mathrm{d}\mathbf{p}_N \; e^{-\beta \mathcal{H}_N} \tag{2}$$

を計算せよ。ここで，$\mathbf{q}_i$ は i 番粒子の座標，h はプランク定数である。

2. この体系の内部エネルギー

$$E(N, \beta, V) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(N, \beta, V) \tag{3}$$

を計算し，系の定積熱容量 C_V を求めよ。

3. エネルギー等分配則とは何か，この問題に即して，1〜2 行程度の文章で簡単に説明せよ。

次に，スピン 1/2 の量子スピンを巨視的な数 N 個含む体系を考える。各スピンは，体系中の各格子点の上に 1 個づつ局在しており，空間的に動き回ることはないとする。この系が，一様磁場 H のもとにおかれている。ハミルトニアンは，各スピンに番号 i $(i = 1, \cdots, N)$ を付け，その状態を $\sigma_i = \pm 1$ として，

$$\mathcal{H}_N = -\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \mu_{\mathrm{B}} H \tag{4}$$

と与えられる。スピン間の相互作用は無視できるとする。 μ_{B} は正の定数である。

4. 体系の分配関数

$$Z(N, \beta, H) = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \cdots \sum_{\sigma_N} e^{-\beta \mathcal{H}_N} \tag{5}$$

を計算せよ。

5. この体系の磁場 $H \to 0$ でのスピン磁化率

$$\chi(T) = \lim_{H \to 0} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{T,N} \tag{6}$$

を計算し，温度 T を横軸にとって図示せよ。ここで M は，分配関数から

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z(N, \beta, H) \tag{7}$$

として計算される体系の磁化である。

6. この体系の内部エネルギー $E(N,\beta,H)$ を計算せよ。

7. この体系の定積熱容量 $C_V(T,H)$ の温度依存性の大体の様子を，温度 T を横軸にとって図示せよ。磁場 H の大きさをパラメータにして何本か線を描くこと。

さて，金属内の伝導電子系の熱力学的性質を考えたい。しかし、上のふたつの体系を参考にしてこれを「各粒子がスピン自由度を持った古典自由粒子系」と考えたのでは、その性質は理解できない。電子はフェルミ統計に従う量子論的な粒子であると考えることが本質的に重要である。

8. 金属内の伝導電子系の熱容量 C_V は，古典論で期待されるよりはるかに小さい値しか持たない。その理由を，次の語をすべて用いて，4 行程度までの文章で簡単に説明せよ。式を導出する必要はない。

パウリ原理，フェルミ縮退，フェルミ準位，励起

9. 金属内の伝導電子系のスピン磁化率 $\chi(T)$ は，低温 $T \to 0$ で，発散することもゼロに向かうこともない有限の値を持つことが知られている（パウリ常磁性)。その理由を，次の語のうち幾つかを用いて，8 行程度までの文章で概念的に分かり易く説明せよ。図や簡単な式を用いてもよい。厳密な式を導出する必要はない。

励起，キュリー則，フェルミ準位，状態密度，スピン分極

以下の数学公式は，必要ならば証明なしに用いてよい。

積分公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0) \tag{8}$$

スターリングの公式：

$$\ln n! \simeq n \ln n - n \quad (n \gg 1) \tag{9}$$

展開公式：

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad (|x| \ll 1) \tag{10}$$

$$\tanh x = 1 - 2e^{-2x} + \cdots \qquad (x \gg 1) \tag{11}$$