平成２０年度
理学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目 (物理学)

試験時間 13:00 ～ 17:00

注意事項

1. 問題 I, II, III, IV の全てについて解答すること。
2. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について１枚以上の解答用紙を提出すること。
3. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図1のように，質量 m の質点Aと質量 m の質点Bを，自然長 $2\ell_0$，ばね定数 k の質量が無視できるばねでつなぎ，滑らかな水平面上に静かに置いた。質点Bの位置を原点とし，BAの方向を x 軸，水平面上でこれに垂直な方向を y 軸とする。時刻 $t=0$ に質点Aに y 方向の初速 v_0 を与えた。質点Bの初速度は0とする。以下の設問に答えなさい。なお，ばねは直線形状を保ち，AB間にはばねの伸びに比例する復元力が働くものとする。

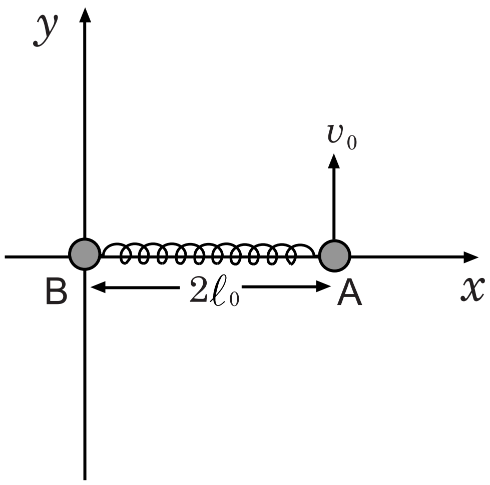


図1

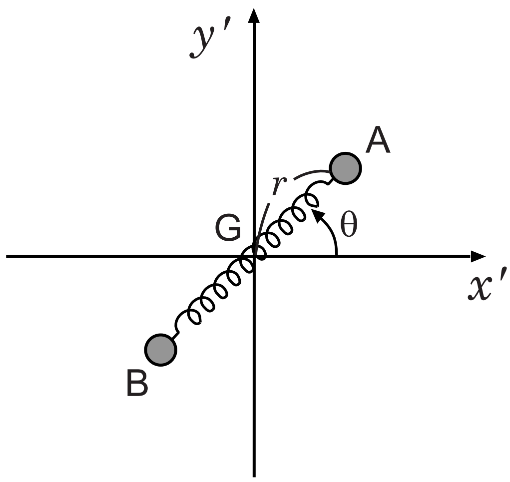


図2

1. 質点Aの座標を $(x_{\rm A}, y_{\rm A})$，質点Bの座標を $(x_{\rm B}, y_{\rm B})$ とする。時刻 $t>0$ の質点A，Bの運動方程式の x 成分と y 成分をそれぞれ書きなさい。

2. 質点Aと質点Bの重心Gの座標を (X, Y) とする。この重心の運動方程式を書きなさい。

3. 重心Gの座標 (X, Y) を時刻 t の関数としてあらわしなさい。

4. 図2のようにGを原点とする座標系をとり，x' 軸，y' 軸はそれぞれ x 軸，y 軸に平行とする。極座標 (r, θ) で表示した質点Aの運動方程式が次式で与えられることを示しなさい。

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}(2r - 2\ell_0)$$
$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

5. $\dot{\theta} = d\theta/dt$ を ℓ_0，v_0，r を用いてあらわしなさい。

6. エネルギー保存式を

$$\frac{m}{2}\,\dot{r}^2 + U_{\rm eff}(r) = 0$$

の形にあらわし，有効ポテンシャル $U_{\rm eff}(r)$ を r の関数として求めなさい。

7. 有効ポテンシャルの概形を横軸を r，縦軸を $U_{\rm eff}(r)$ とするグラフにあらわし，質点Aが r 方向に運動する範囲をグラフ中に記入しなさい。

8. 有効ポテンシャルが極小となるときの r を r_{m} とおく。$|r_{\mathrm{m}} - \ell_0| \ll \ell_0$ のとき，$U_{\mathrm{eff}}(r)$ を $\delta r = r - \ell_0$ の関数として微小量 $\delta r/\ell_0$ の 2 次までの項を残して求め，r_{m} を m, v_0，k, ℓ_0 を用いてあらわしなさい。

9. $|r_{\mathrm{m}} - \ell_0| \ll \ell_0$ となるのはどのような場合か，その条件を m, v_0, k, ℓ_0 を用いてあらわし，物理的な意味を述べなさい。

10. $|r_{\mathrm{m}} - \ell_0| \ll \ell_0$ の場合の質点 A の AB 方向の振動の周期を $|r_{\mathrm{m}} - \ell_0|/\ell_0$ の 1 次の項までを残して求め，m, v_0, k, ℓ_0 を用いてあらわしなさい。

II

1. 真空中（誘電率を ε_0, 透磁率を μ_0 とする）に導体が置かれた場合について，次の設問に答えなさい。

(1) 半径 a の中空（厚みは十分薄い）の筒状導体に，一様な電流 I が軸に平行に流れている（図 1）。筒状導体は無限に長いとし，中心軸からの距離を r として，磁束密度の大きさを r の関数として求めなさい。

図 2 に示すように，半径 a の中空円筒状導体 A と中心軸が共通な半径 b（$> a$）の中空円筒状導体 B がある。それぞれの導体は無限に長く厚みは薄い。

(2) 導体 A の表面に一様な電流 I が，導体 B の表面に一様な電流 $-I$ が，軸に平行に流れているとする。このときの磁束密度の大きさを，中心軸からの距離 r の関数として求めなさい。また，磁束密度の方向を，断面図を書き矢印で示しなさい。

(3) 導体 A, B に電荷が一様に分布しており，その単位長さあたりの電荷がそれぞれ λ, $-\lambda$ であるとする。このときの両円筒間の電位差を求めなさい。

(4) この導体 A, B がコンデンサを形成しているとして，両円筒間の単位長さあたりの電気容量 C を求めなさい。

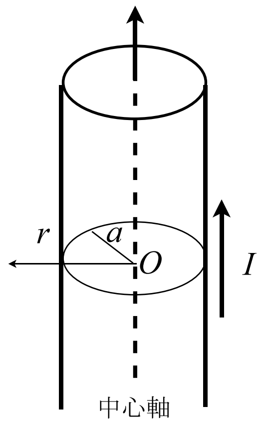


図 1

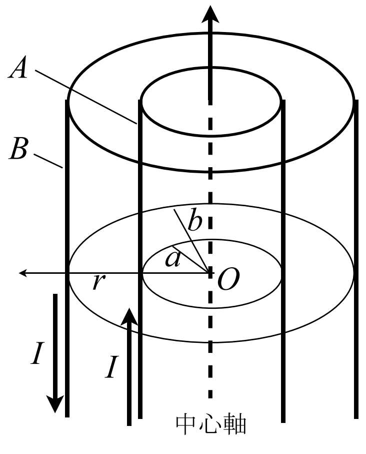


図 2

2. 真空中でのマクスウェル方程式を書きなさい。記号は慣例に基づいて適宜指定しなさい。

3. 導体表面の磁場が導体内に侵入する距離を求めたい。図 3 のように，導体表面上（$z=0$）で一様に振動している磁場 $H_x(0,t)=H_0 e^{-i\omega t}$ が存在しているとする。ただし，$H_y=H_z=0$ とする。導体は一様で，透磁率 μ，電気伝導率 σ を持ち，マクスウェルの変位電流は無視できるとして，$z>0$ の領域のみを考える。次の設問に答えなさい。

(1) $H_x(z,t)$ の解を $H_x(z,t)=h(z)e^{-i\omega t}$ とおく。$h(z)$ に対する下記の方程式を，マクスウェル方程式とオームの法則から導きなさい。必要であれば，ベクトル場 $\mathbf{A}$ に対する恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$ を使ってよい。

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+i\mu\sigma\omega\right)h(z)=0$$

(2) 磁場の強さが導体表面（$z=0$）における値の $1/e$ に減衰する距離 δ を侵入距離という。$\lim_{z\to\infty}H_x(z,t)=0$ として $H_x(z,t)$ を求め，侵入距離 δ を μ, σ, ω で表しなさい。また，その結果から振動数 ω や電気伝導率 σ に対して電磁波の侵入距離がどのように変わるか説明しなさい。

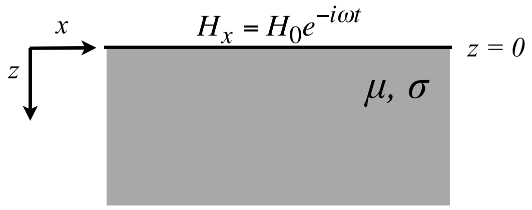


図 3

III

1 次元の Schrödinger 演算子

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$

の固有値問題

$$\hat{H}\psi(x) = E\,\psi(x)$$

について考えよう。1 次元の場合，束縛状態（$|x| \to \infty$ のとき $\psi(x) \to 0$ となる固有状態）は離散的なエネルギー固有値を持ち，その束縛状態には縮退がないことが知られている。以下の設問でこの結果を証明なしに用いてよい。

1. ポテンシャル関数 $U(x)$ が

$$U(x) = \begin{cases} V_1 & (\mathrm{I} : x \le 0) \\ -V_0 & (\mathrm{II} : 0 < x < L) \\ 0 & (\mathrm{III} : x \ge L) \end{cases}$$

で与えられる場合を考える（V_0, V_1 は定数)。ただし，$V_0, V_1 > 0$ である。以下，領域 I, II, III での波動関数をそれぞれ $\psi_{\mathrm{I}}(x)$, $\psi_{\mathrm{II}}(x)$, $\psi_{\mathrm{III}}(x)$ と書くことにする。

(1) $E > 0$ の場合には束縛状態が存在しないことを，$\psi_{\mathrm{III}}(x)$ に着目して示そう。

(a) $\psi_{\mathrm{III}}(x)$ の満たすべき方程式を書き下し，その一般解を求めなさい。

(b) 境界条件を考慮して，$E > 0$ の場合には束縛状態が存在しないことを示しなさい。

(2) 束縛状態に対しては必ず $E \ge -V_0$ となること，すなわち，

$$\left\langle \psi \middle| \hat{H} \middle| \psi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\hat{H}\psi(x) \ge -V_0$$

を示しなさい。

(3) $V_1 \to +\infty$ のとき $\psi_{\mathrm{I}}(x) = 0$ となることを，**(1)** にならって示しなさい。

(4) **(1)**, **(2)** の結果から，束縛状態は $0 > E \ge -V_0$ の範囲でしか存在しない。以下，$V_1 \to +\infty$ の場合のみ考える。

(a) もし束縛状態があるとすれば，

$$(\alpha L)^2 + (\beta L)^2 = 2mV_0L^2/\hbar^2$$

および

$$\beta L = -\frac{\alpha L}{\tan(\alpha L)}$$

が成り立つことを導きなさい。ここで，$\alpha = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$, $\beta = \sqrt{-2mE}/\hbar$ である。

(b) V_0 が十分小さいときには，束縛状態が存在しないことを示しなさい。

なお，詳しい計算を実行すれば，$V_0L^2 \geq \hbar^2\pi^2/(8m)$ を満たすときにのみ束縛状態が存在することを示すことができる。

2.

(1) 一般に，ポテンシャル関数 $U(x)$ が偶関数，すなわち $U(x) = U(-x)$ のとき，束縛状態の固有関数 $\psi(x)$ は偶関数か奇関数のどちらかになることを示しなさい。

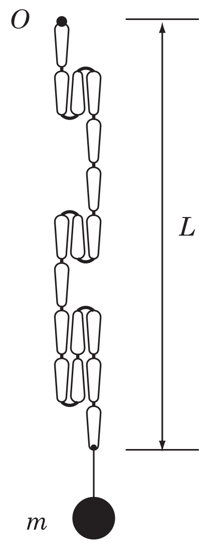
(2) ポテンシャル関数 $U(x)$ が

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (\mathrm{I} : x \leq 0) \\ -V_0 & (\mathrm{II} : 0 < x < L) \\ 0 & (\mathrm{III} : x \geq L) \end{cases}$$

で与えられる場合を考える（V_0 は定数）。ただし，$V_0 > 0$ である。前問 **(1)** を踏まえて，波動関数が $x = L/2$ に節を持つ（すなわち，$\psi(L/2) = 0$ となる）束縛状態が存在するためには，V_0 と L に対してどのような条件が必要か，問 **1.** **(4)** の場合の条件 $V_0L^2 \geq \hbar^2\pi^2/(8m)$ と比較して答えなさい。

IV

高分子の弾性を表す簡単な模型として，棒状単量体（長さ ℓ）がマクロな数 N 個，鎖状につながった分子を考える。この高分子の鎖の一方の端を点 O に固定し，もう一方の端には質量 m のおもりを取り付ける。それぞれの単量体は鉛直方向の上か下かを向くものとし，その質量は無視してよい。高分子の鎖とおもりを合わせて一つの系とみなし，平衡状態ではおもりは常に静止しているものとする。ボルツマン定数を k_{B}，重力加速度を g とする。必要ならば，以下の公式を用いなさい。



図

$$N \gg 1 \text{ のとき} \qquad \log N! \sim N \log N - N$$

1. 上向きと下向きの単量体の数がそれぞれ n_u, n_d であるときの微視的状態の数を求めなさい。

2. 点 O をおもりの位置エネルギーの基準点にとり，系のエネルギー U を n_u, n_d を用いて表しなさい。

3. U と N の関数として，系のエントロピー $S(U,N)$ が以下のようになることを示しなさい。ここでは $\epsilon \equiv mg\ell$ とした。

$$S(U,N) = Nk_{\mathrm{B}} \left\{ \log 2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{U}{N\epsilon}\right)\log\left(1 + \frac{U}{N\epsilon}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{U}{N\epsilon}\right)\log\left(1 - \frac{U}{N\epsilon}\right)\right\}$$

4. U と N の関数として，系の温度 $T(U,N)$ を求めなさい。

以下では，N と温度 T で指定される平衡状態を考える。自由エネルギー $G(T,N)$ を次の Legendre 変換で定義する。右辺は，U を変化させたときの $\{\cdots\}$ 内の式の最小値という意味である。

$$G(T,N) \equiv \min_{U} \{U - TS(U,N)\}$$

5. $\{\cdots\}$ 内の式を最小にする U を T と N の関数として求めなさい。この $U(T,N)$ がこの平衡状態のエネルギーである。

6. 問 **3.** のエントロピーの表式に，上で求めた $U(T,N)$ を代入すると，T と N の関数としてエントロピー

$$S(T,N) \equiv S(U(T,N),N)$$

が求まる。以下の関係が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{\partial G(T,N)}{\partial T} = -S(T,N)$$

7. それぞれの単量体の向きを変数 $\sigma_i = \pm 1$（上向きのとき $+1$ とする）で表すことにする。この σ_i を用いて微視的状態のエネルギーを表しなさい。

8. この系の分配関数 $Z(\beta,N)$ $(\beta \equiv 1/k_{\mathrm{B}}T)$ を求めなさい。

この分配関数 $Z(\beta, N)$ は自由エネルギー $G(T, N)$ と

$$G(T, N) = -k_{\mathrm{B}} T \log Z(\beta, N)$$

という関係で結ばれている。以下では高温 $(k_{\mathrm{B}} T \gg \epsilon = mg\ell)$ の場合を考える。

9. エントロピー $S(T, N)$ が次のようになることを示しなさい。

$$S(T, N) \sim N k_{\mathrm{B}} \left\{ \log 2 - \frac{(mg\ell)^2}{2k_{\mathrm{B}}^2 T^2} \right\}$$

10. 図のように定義した鎖の長さ $L(T, N)$ を求めなさい。温度が上昇したとき鎖の長さはどう変化するか，またその理由を簡単に述べなさい。