平成２３年度
理学研究科　博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目 (物理学)

試験時間　２４０分

注意事項

1. 問題は全部で７ページあります。
2. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは開かないこと。
3. 問題 I，II，III，IV すべてを解答すること。
4. 各問題ごとに別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，各問題について１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を必ず記入すること。（氏名は記入しない）
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

球対称なポテンシャル $\phi(r)$ の中で運動している質量 m の質点に関する下記の問いに答えなさい。

1. 質点のエネルギー E が保存することを証明しなさい。

2. 角運動量 $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が保存することを証明しなさい。ただし $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ は質点の位置と運動量を表す。

以下の設問では，ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{K}{|r - a|} \tag{1}$$

とする。ただし，a と K は正の定数である。また質点は x-y 平面内で，半径 $r \geq a$ の領域を運動していると限定してよい。

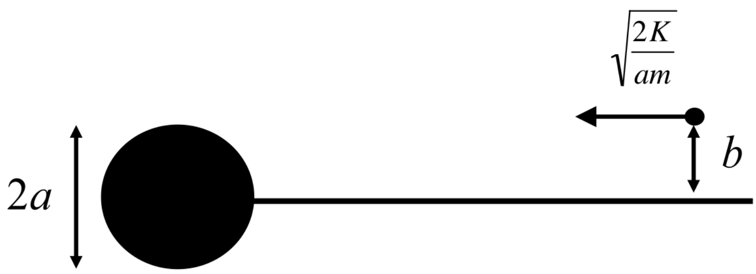
3. 質点が十分に遠い場所から原点に近づいた後，再び遠ざかった。この質点の角運動量の大きさは $\ell = 3\sqrt{amK}$，エネルギーは $E = 0$ であった。この質点の r 方向の運動エネルギー $mv_r^2/2$ を，その位置 r の関数として求め，その概形をグラフに表しなさい。また原点に最も近づいたときの半径を求めなさい。

4. 質点が半径 $r = R > a$ で円運動しているとき，質点の角運動量の大きさ ℓ とエネルギー E を R の関数として求めなさい。またその関数の概形をグラフに表しなさい。

5. 半径 $r = R_n$ で円運動している質点に微小な運動量を r 方向に加えたところ，r 方向に振動しながら回転を続けた。振動の周期は回転の周期のちょうど n 倍になっていて，質点の軌道は n 周回転で閉じていた (n は 2 以上の自然数)。半径 R_n を求めなさい。

6. ここまでの分析を参考にして，問 4 で求めた円軌道の安定性を論じなさい。

7. 十分に遠方から質点が，初速 $v_0 = \sqrt{\dfrac{2K}{am}}$，衝突径数 b で下図のように運動を始めた。この質点が半径 $r = a$ に到達できるのは $|b| < b_{\max}$ の場合に限られる。この $b_{\max}$ を求めなさい。



II

x-y-z 空間の点 $\vec{r}$ における静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ について考える。a を正の定数としたとき，以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

1. 点 $(0,0,a)$ に点電荷 q（$q>0$），点 $(0,0,-a)$ に点電荷 $-q$ が固定されているとする。このとき，静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を，ε_0，q，a，$\vec{r}$，z 軸方向の単位ベクトル $\vec{e}_z$ を用いて示せ。

2. 前問の静電ポテンシャルに対して，十分遠方における近似式を求めよ。ただし，最終的な解答は，ε_0，$\vec{r}$，$r(\equiv|\vec{r}|)$，電気双極子モーメント $\vec{p}$（$\vec{p}\equiv 2qa\vec{e}_z$）を用いて記述せよ。

3. 点 $(0,a,a)$，点 $(0,-a,a)$ に点電荷 q，点 $(0,a,-a)$，$(0,-a,-a)$ に点電荷 $-q$ が固定されているとする（図１）。このとき，これらの電荷の静電エネルギー U_1 を求めよ。また，これらの電荷が作る $x=0$ 平面における等電位面（線）の概略図を示せ。

4. 点 $(0,a,a)$，点 $(0,-a,-a)$ に点電荷 q，点 $(0,-a,a)$，$(0,a,-a)$ に点電荷 $-q$ が固定されているとする（図２）。このとき，これらの電荷の静電エネルギー U_2 を求めよ。また，これらの電荷が作る $x=0$ 平面における等電位面（線）の概略図を示せ。

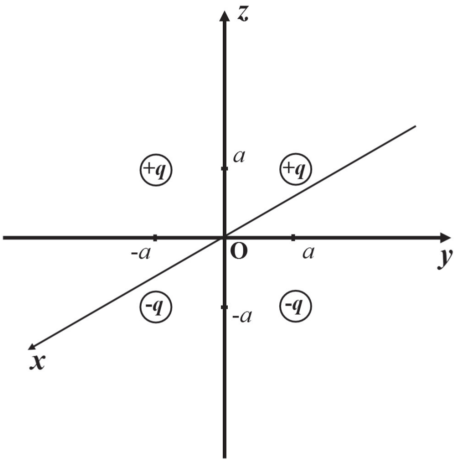


図１

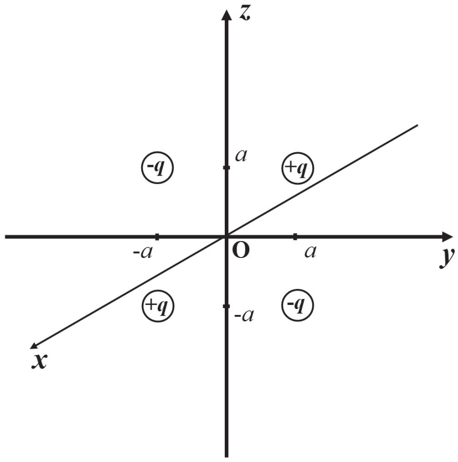


図２

以下では，qa を一定とし，これまでの a に対して $a \to 0$ を仮定した上で，電気双極子モーメント $\vec{p}$ 等を扱ってよいとする。

5. 原点 O に電気双極子モーメント $\vec{p}$ があるとする。さらに，点 $\vec{r}$ に電気双極子モーメント $\vec{P}$ がある場合，$\vec{p}$ と $\vec{P}$ の静電エネルギー $U(\vec{r})$ を ε_0，$\vec{p}$，$\vec{P}$，$\vec{r}$，r を用いて表せ。

6. 同じ大きさをもつ電気双極子モーメントが正四面体の各頂点に存在し，正四面体の重心方向もしくはその反対方向のみを向くことができるものとする（図 3）。このとき，最もエネルギーが低い電気双極子モーメントの向きの組み合わせがどのようになるか，全体のエネルギーを計算することにより示せ。

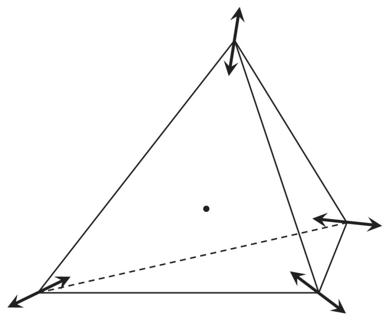


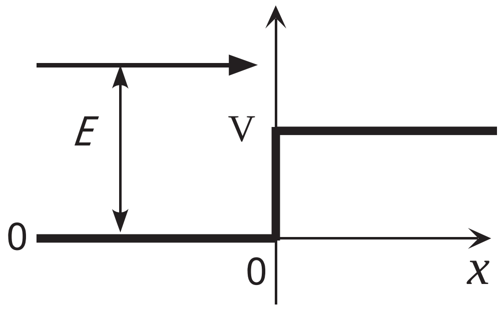
図 3

III

１次元のポテンシャル $U(x)$ 中を運動する質量 m の量子力学的粒子の波動関数を $\Psi(x,t)$ とする。ただし，t は時間である。

1. 確率の流れの密度：$j = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^*(\frac{\partial}{\partial x}\Psi) - (\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*)\Psi]$ は，確率密度の保存則：$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x}j = 0$ を満たすことを示せ。

エネルギー E，質量 m の量子力学的粒子が，図のように，$x > 0$ で高さ $V\ (> 0)$ の階段型ポテンシャルに，左から入射した。この粒子の運動を，まずは定常状態の問題として考えよう。



2. エネルギーが $E > V$ の場合，透過率 T，反射率 R を求めよ。

3. 前問で求めた透過率 T を，エネルギー E の関数として図示せよ。

4. エネルギーが $0 < E < V$ の場合，反射率 R はいくつになるか。その理由も説明せよ。また，波動関数の $x > 0$ の領域への侵入長 L を，エネルギーの関数として図示せよ。

5. エネルギーが $0 < E < V$ の場合，入射波 Ae^{+ikx} と反射波 Be^{-ikx} の位相のずれ $\theta(k)$ を $B = Ae^{-i\theta(k)}$ で定義する。ただし $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ である。$\tan\frac{\theta(k)}{2}$ を求めよ。また，位相のずれのエネルギー依存性を，横軸を E，縦軸を $\theta(k)$ としたグラフで図示せよ。

エネルギーが $0 < E < V$ の場合，粒子は $x = 0$ において瞬時に反射されるわけでなく，$x > 0$ の領域に侵入してから戻ってくる。次に，この反射に要する時間を，$x < 0$ における波束の運動を使って調べてみよう。

ここでは入射波束を，k_0 を中心にガウス分布している波数 k の平面波を集めて，

$$\Psi_{\mathrm{in}}(x,t) \quad = \quad \int \mathrm{d}k \ e^{-\Delta^2(k-k_0)^2} \cdot Ae^{+ikx-i\omega(k)t}$$

とする。但し，$\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$ である。Δ^2 が十分に大きいとすると，積分区間は $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k$ としてよい。複素数 a (但し $\mathrm{Re}(a) > 0$) と実数 b に対して成り立つ公式: $|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z e^{-az^2+ibz}|^2 = \frac{\pi}{|a|} \exp\left[-\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a^*}\right]$ を用いると

$$|\Psi_{\mathrm{in}}(x,t)|^2 \quad = \quad |A|^2 \frac{\pi}{\sqrt{\Delta^4 + (\frac{\hbar t}{2m})^2}} \exp\left[-\frac{(x - \frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2(\Delta^2 + (\frac{\hbar t}{2m\Delta})^2)}\right]$$

となる。つまり，入射波束の中心（最大値を持つ位置）x は，$x = \frac{\hbar k_0}{m} t$ のように等速で右側に動き，時刻 $t = 0$ で $x = 0$ に到達していることがわかる。

6. 反射した波束は，問 5 で求めた位相 $\theta(k)$ を用いて，

$$\Psi_{\mathrm{ref}}(x,t) = \int \mathrm{d}k \ e^{-\Delta^2(k-k_0)^2} \cdot Ae^{-ikx-i\omega(k)t-i\theta(k)}$$

となる。Δ^2 が大きいので，ここでは $\theta(k) \sim \theta(k_0) + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}k}|_{k=k_0}(k - k_0)$ と近似する。入射波束と同様に積分を実行して，$|\Psi_{\mathrm{ref}}(x,t)|^2$ を求めよ。また，反射波束の中心が $x = 0$ から $x < 0$ の領域に出てくる時刻 τ はいくつか。いずれも $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}k}|_{k=k_0}$ を用いて答えよ。

7. 問 6 の結果から，反射に要する時間は τ と考えられる。τ をエネルギー E_0 の関数として図示せよ。但し，$E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ である。また，E_0 が V に近づくと，ここで求めた τ の値は正確でなくなる。その理由を議論せよ。

IV

ある２原子分子は，質量 m_1 と m_2 の質点が自然長 r_0，ばね定数 k のばねでつながれ，調和振動（分子振動）および回転運動をしている系として模型化できる。ばねは十分硬いので，分子の回転運動は分子振動に影響を与えない。換算質量を $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ とすると，この分子振動の角振動数は $\omega = \sqrt{k/\mu}$ であり，この分子を細い棒状の剛体とみたときの分子軸に垂直な主軸周りの慣性モーメントは $I = \mu r_0^2$ である。

この分子がマクロな数 N 個，面積 A のマクロな大きさの矩形面内に束縛され，面上を自由に運動している。分子間の相互作用は無視できるほど小さいが，面上に束縛されているため，分子の回転運動は，回転面が矩形面と平行なもののみ可能である。

この２次元２原子分子理想気体が温度 T の熱平衡状態にある。k_B をボルツマン定数として $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ である。次の各問に答えよ。必要なら，積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/a}$ $(a>0)$ を用いてよい。

1. この体系を，分子の内部自由度を無視し，質量 $m = m_1 + m_2$ の質点の集まりと考える。i 番目の分子の座標を $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$，運動量を $\mathbf{p}_i = (p_{x,i}, p_{y,i})$ とし，古典力学を仮定する。この系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}(p_{x,i}^2 + p_{y,i}^2) \tag{2}$$

と与えられる。

(1) この体系の分配関数

$$Z(N,A,\beta) = \frac{1}{N!\,h^{2N}} \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{r}_N \int \mathrm{d}\mathbf{p}_1 \cdots \mathrm{d}\mathbf{p}_N \, e^{-\beta \mathcal{H}_N} \tag{3}$$

を計算せよ。h はプランク定数である。

(2) この体系の内部エネルギー

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(N,A,\beta) \bigg|_{N,A} \tag{4}$$

を温度 T の関数として計算し，体系の熱容量 C_N を求めよ。

(3) 極低温になると，この自由粒子系にも量子力学的な効果が現れはじめる。１粒子エネルギー準位の離散性の効果はあまりにも低温でしか現れないので無視するとして，マクロな量子力学的自由粒子系には，測定可能な極低温において，量子力学固有の性質が発現する。その原因について，２〜３行程度の文章で簡単に説明せよ。必要なら図を用いてよい。さらに，１分子の質量を $m \simeq 7 \times 10^{-26}$ kg，平均分子間距離を $(A/N)^{1/2} \simeq 1 \times 10^{-8}$ m として，この系に量子力学的効果が現れはじめる温度を概算せよ。$h \simeq 7 \times 10^{-34}$ J s，$k_\mathrm{B} \simeq 1 \times 10^{-23}$ J/K とする。

2. 次に，体系中の分子がすべて矩形面内で局在し，分子軸方向に角振動数 ω の量子力学的な調和振動をしている場合を考える。分子間の相互作用は無視できるとすると，N 個の

分子からなるこの体系の微視的エネルギーは，微視状態を $\sigma = \{n_1, n_2, \cdots, n_N\}$ で指定して，

$$E_\sigma = \sum_{i=1}^{N} \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{5}$$

と書かれる。ここで，n_i は i 番目の振動子の量子数であり，$n_i = 0, 1, 2, \cdots$ という値をとる。

(1) この体系の分配関数 $Z(N, \beta) = \sum_\sigma e^{-\beta E_\sigma}$ を計算せよ。

(2) この体系の内部エネルギー E を温度の関数として計算し，その概形を温度 T を横軸にとって図示せよ。またその結果を参考にして，この体系の熱容量 C_N の温度依存性の概形を，温度 T を横軸にとって図示せよ。縦軸，横軸のスケールを明記すること。

3. 次に，体系中の分子がすべて矩形面内で局在し，面に垂直な軸の周りで量子力学的な回転運動をしている場合を考える。分子（回転子）間の相互作用は無視できるとすると，N 個の分子からなるこの体系の微視的エネルギーは，微視状態を $\sigma = \{n_1, n_2, \cdots, n_N\}$ で指定して，

$$E_\sigma = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2I} n_i^2 \tag{6}$$

と書かれる。ただし，n_i は i 番目の回転子の量子数であり，$n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ という値をとる。

(1) 温度が十分高い場合，n_i での和を積分に移行することにより，この体系の分配関数を計算し，内部エネルギーと熱容量を求めよ。

(2) 温度が十分低い場合，回転子の低エネルギー状態 $n_i = 0, \pm 1$ のみを考慮し，体系の分配関数，内部エネルギー，熱容量を計算せよ。

(3) これら **(1)**，**(2)** の結果から，体系の内部エネルギーの全温度領域にわたる温度依存性について考察し，その概形を温度 T の関数として図示せよ。

(4) 体系の熱容量の温度依存性を前問 **(3)** の結果をもとに考察し，その概形を温度 T の関数として図示せよ。縦軸，横軸のスケールを明記すること。

4. 以上の結果を用いて，２原子分子が矩形面内に束縛されて自由に並進，振動，面内回転を行っている２次元理想気体を考える。この分子の分子振動に対する特徴的な温度スケールを $\Theta_{\mathrm{vib}} = \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$ とし，回転運動に対する特徴的な温度スケールを $\Theta_{\mathrm{rot}} = \hbar^2/(2Ik_{\mathrm{B}})$ とする。その値は，それぞれ $\Theta_{\mathrm{vib}} = 800\mathrm{K}$，$\Theta_{\mathrm{rot}} = 8\mathrm{K}$ であった。

(1) この体系の熱容量 C_N の温度依存性の概形を，横軸を対数目盛での温度に取り，$T = 0.1\mathrm{K} - 10^4\mathrm{K}$ 程度の幅広い温度範囲にわたって描け。縦軸，横軸のスケールを明記すること。

(2) 熱容量がこのような温度依存性を示す理由を，古典統計力学におけるエネルギー等分配の法則と，量子力学的効果による自由度の「凍結」という考えを用いて，５行から１０行程度の文章で分かりやすく説明せよ。必要なら図を用いてよい。