平成２７年度
大学院理学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(１)(物理学)

試験時間 １２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまで, この問題冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で３ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること（氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 太陽 (質量 2.0×10^{30} kg) から地球の公転軌道半径 (1.5×10^{11}m) だけ離れた地点において，太陽系から脱出するのに必要な速さはどれだけか，有効数字 1 桁で求めよ。ただし，万有引力定数は $6.7 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$ である。

2. 質量 m_1 の物体 A と質量 m_2 の物体 B が xy 平面上を運動している。それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とし，互いの重力のみがこれらに作用しているとする。万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。

(1) ラグランジアン L を書き表せ。

(2) $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の代わりに重心の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ と相対位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を用い，これらと換算質量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$，全質量 $M = m_1 + m_2$ により L を書き直せ。

以下では相対運動だけを考える（重心の座標は適切に消去したものとする）。

(3) ラグランジアンを極座標 (r, θ) により表せ。

(4) 相対運動の角運動量 h が保存されることを示せ。

(5) 相対運動の力学的エネルギー E を $r, \dot{r}, h, G, \mu, M$ を用いて書き表し，保存されることを示せ。

(6) h が与えられたとき（ただし $h \neq 0$），E が最小となるのは相対運動がどのような場合か。またそのときの E の最小値 E_0 を求めよ。

以下，$h \neq 0$ かつ $E_0 < E < 0$ の場合に限定する。

(7) r のとりうる最小値 r_min と最大値 r_max を E, h および G, μ, M で書き表せ。

(8) $\dot{r}$ を r_min と r_max および r, G, μ, M のうち必要な記号を用いて書き表せ。

(9) 相対運動の軌道は $r_\mathrm{min} \leq r \leq r_\mathrm{max}$ の楕円軌道である。相対運動の周期 T を，$r_\mathrm{min}, r_\mathrm{max}, G, \mu, M$ のうち必要な記号を用いて書き表せ。

II

1. 図 1 のように，真空中（誘電率 ε_0）に，原点 O を共通の中心にして，半径 a の薄い導体球殻 A と，内半径 b，外半径 c の厚さのある導体球殻 B が置かれている。球殻 A は接地されていて，球殻 A および無限遠点の電位はゼロである。球殻 B に電荷 Q を与えると，電荷は球殻 B の内表面と外表面にそれぞれ Q_1, Q_2 と分かれて一様に分布した。

(1) 原点 O から距離 r $(a < r < b)$ の点における電場 $E_1(r)$ と $r = b$ の点の電位 ϕ_1 を，Q_1 を用いて表せ。ただし，電場の符号は原点から離れる方向を正とせよ。

(2) 原点 O から距離 r $(c < r)$ の点における電場 $E_2(r)$ と $r = c$ の点の電位 ϕ_2 を，Q_2 を用いて表せ。ただし，電場の符号は原点から離れる方向を正とせよ。

(3) 問 **(1)**，**(2)** の結果から，Q_1, Q_2 を Q を用いて表せ。

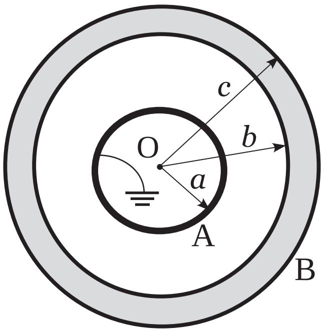

図1

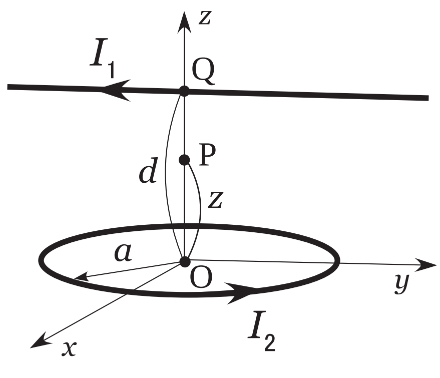

図2

2. 図 2 のように，真空中（透磁率 μ_0）に，無限に長い直線導体が点 Q$(0, 0, d)$ を通り y 軸に平行に，半径 a の円環導体が原点 O を中心にして xy 平面上に置かれている。直線導体には $-y$ 方向に電流 I_1 が，円環導体には図の方向 $(+z$ 方向から見て左回り$)$ に電流 I_2 が流れている。この時，z 軸上の点 P$(0, 0, z)$ $(-\infty < z < d)$ における磁場を考えよう。

(1) 電流 I_1 が点 P につくる磁場の方向とその大きさ H_1 を求めよ。

(2) 電流 I_2 が点 P につくる磁場の方向とその大きさ H_2 を求めよ。

(3) 点 P における磁場と xy 平面とのなす角度が最大になる z の値を求めよ。ただし，$-\infty < z < d$ である。

3. インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを 1 ユニットとして，このユニットを図 3 のように無限に接続した回路を考える。コンデンサーの下端は接地され，電位はゼロである。時刻 t における，n 番目のユニットのコイルの左端の電位を $V_n(t)$，コイルを流れる電流を $I_n(t)$ とする。

(1) キルヒホッフの法則を用いて，次の電流の方程式を導きなさい。

$$CL\frac{d^2 I_n(t)}{dt^2} = I_{n+1}(t) - 2I_n(t) + I_{n-1}(t)$$

(2) 前問 **(1)** の方程式の基本解として，角振動数 $\omega(>0)$ で振動する $I_n(t) = I_0 e^{in\theta} e^{-i\omega t}$ を考えよう。I_0 は定数である。θ は一般に複素数であるが，θ が実数の場合は n が大きくなっても電流の大きさが減衰または増大することはない。θ が実数になるためには，ω はある値 ω_0 より小さくなければならない。ω_0 を求めよ。

(3) 1 ユニットの長さを ℓ とする。$\omega \ll \omega_0$ の時，電流変化の波がこの回路を右に伝わる速さを求めよ。

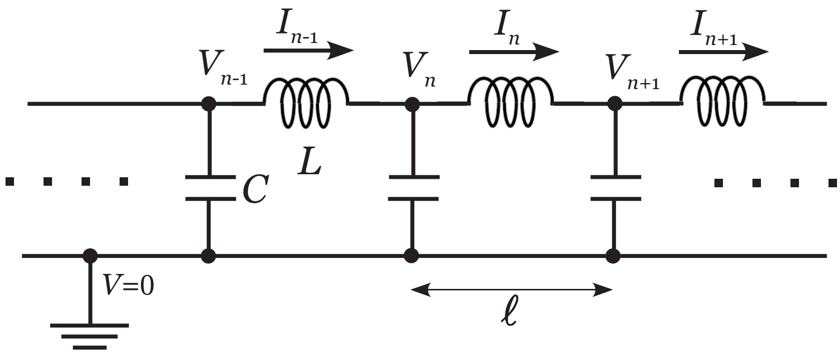

図3