平成２７年度
大学院理学研究科 博士前期課程 学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目 (2) (物理学)

試験時間 １２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまで, この問題冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また, 問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を必ず記入すること（氏名を記入してはいけない）。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

以下の問いに答えよ。必要であればGauss積分に関する次の結果を使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

1. 1次元調和振動子のHamiltonianは，長さとエネルギーをスケールすれば

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2$$

と表せる。

(1) $\hat{H}_0$による基底状態の波動関数は$\varphi_0(x) = C\, e^{-\nu x^2}$の形を持つ。定常状態のSchrödinger方程式$\hat{H}_0\, \varphi_0(x) = \varepsilon\, \varphi_0(x)$より，パラメータ$\nu$及び基底状態のエネルギー$\varepsilon$を定めよ。

(2) 規格化定数C(ただし$C > 0$とする)を定めよ。

(3) この結果を用いて，次のHamiltonian

$$\hat{H}_\ell = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}(x-\ell)^2$$

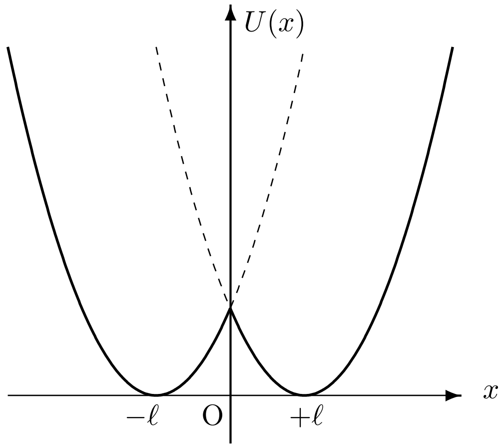
による基底状態のエネルギーと，その規格化された波動関数$\varphi_\ell(x)$を書き下せ。

2. 1次元Hamiltonian $\hat{H} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x)$において$U(x) = U(-x)$が成り立つならば，束縛状態のエネルギー固有関数$\psi(x)$は$\psi(x) = \psi(-x)$または$\psi(x) = -\psi(-x)$のいずれかの性質を持つ。

任意の関数$f(x)$に対し$\hat{P}\, f(x) = f(-x)$のように作用するエルミート演算子$\hat{P}$を用いて，これを示せ。ただし，1次元問題において束縛されたエネルギー固有状態には縮退がないことを，証明なしに使ってよい。

3. ポテンシャルの最小点が2ℓだけ離れたHamiltonian(ただし$\ell > 0$)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\,; \quad U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+\ell)^2 & (x < 0) \\ \dfrac{1}{2}(x-\ell)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$



の基底状態について考察しよう。$x \gtrless 0$ の領域それぞれで，Hamiltonian は **1.** で定義した $\hat{H}_{\pm\ell}$ に一致しており，ℓ が十分大きい場合，**1.** で得た $\varphi_{\pm\ell}(x)$ の重ね合わせにより，基底状態の波動関数がよく近似できるはずである。**2.** の議論を考慮に入れると，$\psi_1(x) = \varphi_{+\ell}(x) + \varphi_{-\ell}(x)$, $\psi_2(x) = \varphi_{+\ell}(x) - \varphi_{-\ell}(x)$ のいずれか一方が近似的な基底状態を与える。ただし，$\varphi_{\pm\ell}(\pm\ell) > 0$ とする。ここでは，$\ell\,(>0)$ の値に関わらず $\psi_1(x)$ または $\psi_2(x)$ により基底状態を近似しよう。なお，簡単のため次のように Dirac の表記法を用いる。

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g^*(x)\, f(x)\,, \quad \langle g|\hat{H}|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g^*(x)\, \big[\hat{H} f(x)\big]$$

また，$\psi_i(x)\,(i=1,2)$ は規格化されていないことに注意せよ。

(1) $\Delta_\ell = \langle\varphi_{+\ell}|\varphi_{-\ell}\rangle$ とする。Δ_ℓ を求めよ。

(2) $\psi_i(x)\,(i=1,2)$ に対するエネルギー期待値は

$$E_i(\ell) = \frac{\langle\psi_i|\hat{H}|\psi_i\rangle}{\langle\psi_i|\psi_i\rangle}$$

であり，各 ℓ に対して $E_1(\ell)$ と $E_2(\ell)$ のうち低い方を近似的な基底状態エネルギーと見なせる。$t_\ell = \langle\varphi_{+\ell}|\hat{H}|\varphi_{+\ell}\rangle\,\big(=\langle\varphi_{-\ell}|\hat{H}|\varphi_{-\ell}\rangle\big)$, $v_\ell = \langle\varphi_{+\ell}|\hat{H}|\varphi_{-\ell}\rangle$ として，$E_1(\ell)$, $E_2(\ell)$ を Δ_ℓ, t_ℓ, v_ℓ で表せ。

(3) $\hat{H} = \hat{H}_{\pm\ell} + (\hat{H} - \hat{H}_{\pm\ell})$ (複号同順) に注意して，$t_\ell < \varepsilon$ となることを示せ。ここで，ε は **1. (1)** で求めたエネルギーである。

(4) $E_1(\ell) - E_2(\ell) < 0$ を示せ。

(5) ℓ を変数として $E_1(\ell)$ の概形をグラフにし，実線で表せ。$\lim_{\ell\to 0} E_1(\ell)$ 及び $\lim_{\ell\to\infty} E_1(\ell)$ の値を明示すること。さらに，$\hat{H}$ による真の (近似値でない) 基底状態エネルギーの ℓ に対する変化も，その概形を同じグラフに破線で書き入れよ。

II

相互作用しない $N(\gg 1)$ 個の $S = \frac{1}{2}$ のスピンが一様な磁場 H 中に置かれている。このスピン系のエネルギー固有値は，スピン変数 $\sigma_i = \pm 1$ を用いて，

$$E(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) = -H \sum_{i=1}^{N} \mu \sigma_i$$

で与えられる。μ は正の定数である。温度 T の熱平衡状態を考える。

1. この系の分配関数

$$Z(\beta, H, N) \equiv \sum_{(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)} e^{-\beta E(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)}$$

を求めよ。ここでは $\beta = \dfrac{1}{kT}$（k は Boltzmann 定数）である。

2. 自由エネルギー

$$G(T, H, N) = -kT \log Z(\beta, H, N)$$

を求めよ。

3. エントロピー $S(T, H, N)$ を求めよ。また，準静的断熱過程で磁場を減少させたとき，温度が磁場とともにどのように変化するか，簡単に説明せよ。

4. 全磁化 $M(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mu \sigma_i$ について，

$$M(T, H, N) \equiv \langle M(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) \rangle_T = -\frac{\partial G(T, H, N)}{\partial H}$$

となることを示せ（$\langle \ldots \rangle_T$ はカノニカル分布の期待値である）。また，温度を一定にしたとき，全磁化 $M(T, H, N)$ が磁場にどのように依存するか図示せよ。

5. 全磁化のゆらぎ

$$\sigma\{M\} \equiv \sqrt{\left\langle \{M(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) - \langle M(\sigma_1, \cdots, \sigma_N) \rangle_T\}^2 \right\rangle_T}$$

を求め，$\sigma\{M\} \ll N\mu$ であることを示せ。

以下では磁場が十分弱い場合を考える。

6. 自由エネルギーを H の 2 次まででで展開すると

$$G(T,H,N) \simeq N\left\{g_0(T) + g_1(T)H^2\right\}$$

の形に書ける。$g_0(T)$ と $g_1(T)$ を求めよ。

7. 前問 **6.** で求めた $G(T,H,N)$ を H について Legendre 変換し，T, M, N を自然な変数とする自由エネルギー

$$F(T,M,N) = \max_H \{G(T,H,N) + MH\}$$

を求めよ。$\max\limits_H$ は H を変数として変化させたときの最大値である。

8. このスピン系では，磁場 H が 0 のときは全磁化 $M(T,H,N)$ は 0 である。$H=0$ のときにも有限の全磁化を持ち得るように，**7.** で求めた自由エネルギーを以下のように拡張する。

$$F(T,M,N) = Nk\left\{-T\log 2 + \frac{T-T_{\mathrm{C}}}{2}\left(\frac{M}{N\mu}\right)^2 + \frac{B}{4}\left(\frac{M}{N\mu}\right)^4\right\}$$

ここで，T_{C} と B は正の定数である。$M(T,H=0,N)$ を求め，温度とともにどのように変化するか図示せよ。