平成２８年度
大学院理学研究科博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(１)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 質量 m の質点と長さ ℓ の軽いひもからなる球面振り子を，振り子の支点を原点とするデカルト座標 (x, y, z) と極座標 (r,θ,φ) で考える (図 1)。空気抵抗や摩擦を無視して，以下の問いに答えよ。ただし $\theta = 0$ (z 軸正の向き) を鉛直下方，重力加速度の大きさを g とする。また，ひもはつねに直線状に伸びているとしてよい。

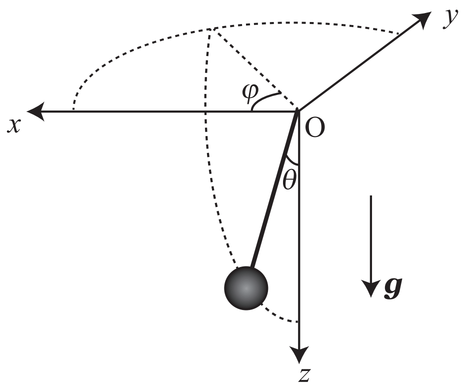

図 1. 球面振り子

(1) ラグランジアンを極座標で表し，運動方程式を導け。

(2) 質点が鉛直面内で微小振動する場合の固有角振動数を求めよ。

(3) 振幅は十分に小さい ($|\theta| \ll 1$) が，φ 方向にも動く場合の微小振動の固有角振動数を求めよ。

(4) 質点が角度 θ が一定 (十分に小さいとは限らない) のまま φ 方向に回転し続けている状態を考える。このときの角速度 $\dot{\varphi}$ を求めよ。

(5) 質点が鉛直面内を角度 $\theta = \pm\alpha$ の範囲を振動している場合を考える。角度が $\theta = \beta > 0$, $\dot{\theta} > 0$ であるときに突然ひもが切れ，質点は放物運動を始めた ($\alpha > \beta$)。放物運動をしている時の最高地点の高さ ($z_{\min}$) をデカルト座標で求めよ。ひもが切れたときにはたらく撃力は無視してよい。

2.　内壁が円筒状の容器の中を滑らずに転がる，半径が a，長さが b で密度が ρ で一様な円柱を考える。(円柱の質量は $M = \pi\rho a^2 b$、軸周りの慣性モーメントは $I = Ma^2/2$ である。) 容器は図 2 のように固定されており，鉛直下向きを z 軸としたデカルト座標でその内壁は

$$\begin{aligned} x &= (\ell + a)\sin\theta \\ z &= (\ell + a)\cos\theta \end{aligned}$$

と表される。ここで θ は $-\pi/2 \le \theta \le \beta$ の範囲を動く媒介変数で，β は $0 < \beta < \pi/2$ で容器の縁を表す変数である (図 2)。円柱は容器の軸 (y 軸) に平行に置かれており，円柱が容器の内面に接している間，その軸の位置は

$$\begin{aligned} x &= \ell\sin\theta \\ z &= \ell\cos\theta \end{aligned}$$

と媒介変数 θ を使って表すことができる。重力加速度を $g > 0$，空気抵抗は無視できるとして以下の問いに答えよ。

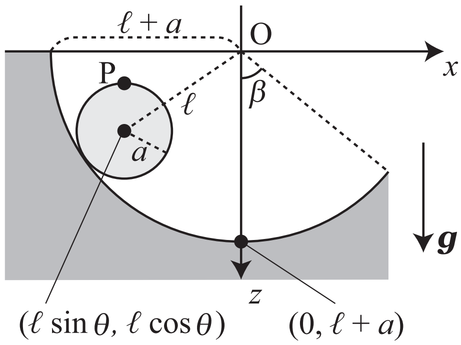

図 2. 内壁が円筒状の容器を滑らずに転がる円柱

(1) 容器の最下点 $(x, z) = (0, \ell + a)$ と接する円柱表面の点を P とする。円柱が内壁と接して転がるときの P の (x, z) 座標を θ の関数として表せ。

(2) 円柱の運動エネルギーを $\dot{\theta}$ を用いて表せ。

(3) 円柱が $\theta = 0$ の付近で微小振動するときの固有角振動数を求めよ。

(4) 容器は $\theta = \beta$ で切れていて，この角度を超すと円柱は容器の外へ飛び出す。角度 $\theta = -\alpha$ ($\alpha > \beta$) から $\dot{\theta} = 0$ で転がり始めたとして， 飛び出したあと円柱の軸が到達する最高の高さ ($z_{\min}$) を求めよ。

II

質量 m の粒子が角振動数 ω の 1 次元調和振動子ポテンシャル中を運動する。ハミルトニアン H_0 は

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \,, \qquad p = -\,i\hbar \frac{d}{dx}$$

である。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$

は交換関係 $\left[\, a \,,\, a^\dagger \,\right] = 1$ を満たす。n を非負の整数として

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n \varphi_0(x) \,, \quad \text{ただし} \quad a\varphi_0(x) = 0 \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\varphi_0(x)|^2 = 1$$

とする。

1. $\left[\, a \,,\, (a^\dagger)^n \,\right] = n \, (a^\dagger)^{n-1}$ は $n = 1$ のとき成り立つ。$n \geq 2$ でも成り立つことを示せ。

2. H_0 を $a^\dagger a$ で表せ。また，**1.** の交換関係を用いて $\varphi_n(x)$ が H_0 の固有関数になることを示し，固有値 ε_n を求めよ。

3. 次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi_n^*(x) \varphi_{n'}(x) \,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi_n^*(x) x \varphi_{n'}(x)$$

以下では，ハミルトニアン H が

$$H = H_0 + \lambda V \,, \qquad V = \frac{\hbar\omega}{2} \Big((a^\dagger)^2 + a^2 \Big)$$

の場合を考える。無次元の定数 λ は $-1 < \lambda < 1$ とする。H の固有値を E，固有関数を $\psi(x)$ で表す。

4. H_0 の n 番目の固有関数 $\varphi_n(x)$ に対する λV の効果を摂動として扱う。λ のベキ級数展開で表して

$$E = \varepsilon_n + \lambda E_1 + \lambda^2 E_2 + \cdots\,, \qquad \psi(x) = \varphi_n(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + \cdots$$

ただし

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_n^*(x)\psi_k(x) = 0\,, \qquad k = 1,\, 2,\, \cdots$$

とする。

(1) λ のベキを比較して

$$\big(H_0 - \varepsilon_n\big)\psi_1(x) = \big(E_1 - V\big)\varphi_n(x)$$

$$\big(H_0 - \varepsilon_n\big)\psi_2(x) = \big(E_1 - V\big)\psi_1(x) + E_2\varphi_n(x)$$

を示せ。

(2) $E_1 = 0$ を示せ。また, E_2 を ε_n で表せ。

5. $H\psi = E\psi$ を厳密に解く。$u,\, v$ を実数として $b = ua + va^\dagger$ を定義する。ただし $u > 0$ とする。

(1) $\big[\, b\,,\, b^\dagger \,\big] = 1$ となるとき，u を v で表せ。

(2) **(1)** の条件を満たすとき

$$H = f(v,\lambda)\,\hbar\omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right) + g(v,\lambda)\,\hbar\omega\left((b^\dagger)^2 + b^2\right)$$

になる。$f(v,\lambda)$, $g(v,\lambda)$ を求めよ。

(3) $g(v,\lambda) = 0$ となるように v を選べば $f(v,\lambda)$ は λ だけの関数 $f(\lambda)$ になる。$f(\lambda)$ を求め，λ が微小のとき

$$E = \varepsilon_n + \lambda^2 E_2 + O\big(\lambda^3\big)$$

になることを示せ。ただし，E_2 は問 **4.** (2) で求めたものである。

(4) $g(v,\lambda) = 0$ のとき，H の基底状態 $\psi_0(x)$ は $b\psi_0(x) = 0$ で決まり $\psi_0(x) \propto \varphi_0(\alpha x)$ になる。α を λ で表せ。