平成２９年度
大学院理学研究科博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(１)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと.

2. 問題は全部で４ページある.

3. 問題 I, II の両方に解答すること.

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること. １枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない. また, 問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること.

5. 全ての解答用紙の所定欄に, 問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）.

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない.

I

1. 真空中の誘電率を ϵ_0 として，以下の問いに答えなさい．

一本の線密度 λ で一様な無限に長い直線状電荷がある．

(1) この直線状電荷から距離 r の点における電場の大きさを求めなさい．

(2) この直線状電荷から距離 r の点における静電ポテンシャルを求めなさい．ただし，この問いでは，この直線状電荷から距離 r_0 の点を，静電ポテンシャルの基準とする．

二本の薄くて無限に長い半径 d の円筒形導体を z 軸に平行に置く．図 1 に示すように，導体の中心軸はそれぞれ xy 面の点 A $(a, 0)$，A′ $(-a, 0)$ を通る．ここで，$a > d$ である．

さて，二本の円筒形導体の持つ単位長さあたりの静電容量を鏡像法を用いて求めよう．二本の円筒形導体の代わりに，線密度 $\pm\lambda$ で一様な無限に長い直線状電荷を点 B $(b, 0)$，B′ $(-b, 0)$ を通って z 軸に平行に置き，元の導体表面の等ポテンシャル面を $\pm\lambda$ の直線状電荷で再現させる．導体の外の空間に点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとり，距離 PB，PB′ をそれぞれ r，r' とし，点 O を静電ポテンシャルの基準とする．

(3) 点 P における静電ポテンシャルを λ，r，r' を用いて表しなさい．

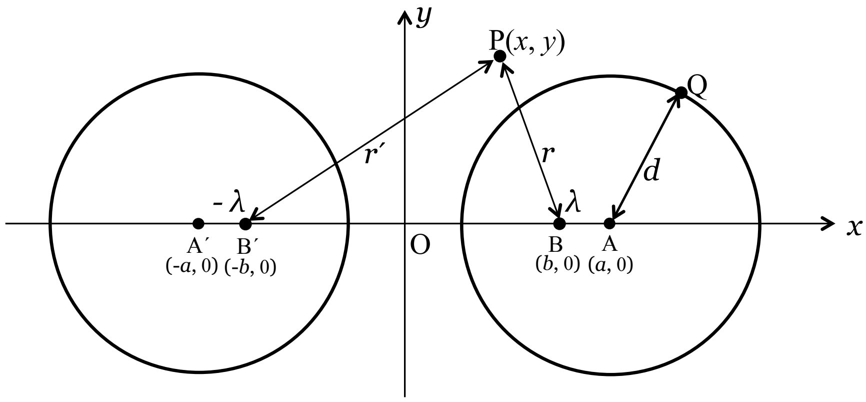

図 1:

r'/r の比が一定の場合に点 P の軌跡は円になる．この円が点 A を中心とする半径 d の円と一致すれば，その円の円周上の任意の点 Q で静電ポテンシャルが一定になる．

(4) 点 Q で静電ポテンシャルが一定になる r'/r，および b を a，d を用いて表しなさい．

(5) 点 Q における静電ポテンシャルを λ，a，d を用いて表しなさい．

以上，元の平行に置かれた薄くて無限に長い半径 d の円筒形導体間に生じる電場を鏡像法で再現できた．

(6) 最初に置かれた二本の円筒形導体が持つ，単位長さあたりの静電容量を a，d を用いて表しなさい．

2. 図 2 に示すように，平行に置かれた二本の薄くて無限に長い円筒形導体の一端に交流電圧を加えると，二本の円筒形導体には交流電流が流れる．このとき，円筒形導体は単位長さあたり静電容量 C_0，自己インダクタンス L_0 が連続的に分布した電気回路とみなすことが出来る．位置 z，　時刻 t で，二本の円筒形導体を流れる電流がそれぞれ $\pm I(z,\ t)$，円筒形導体間の電圧が $V(z,\ t)$ である．また，位置 $z+\Delta z$ において電流・電圧はそれぞれ $\pm(I+\Delta I)$，$V+\Delta V$ である．以下の問いに答えなさい．

(1) z と $z+\Delta z$ との間で，導体の自己インダクタンスによる誘導起電力 ΔV を，$L_0,\Delta z,\frac{\partial I}{\partial t}$ を用いて表しなさい．

(2) z と $z+\Delta z$ との間に，短い時間 Δt に流れ込む電荷 $\Delta I\Delta t$ によって，電圧が $\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t$ だけ変化する． ΔI を $C_0,\Delta z,\frac{\partial V}{\partial t}$ を用いて表しなさい．

(3) $I(z,t)$ が満たす波動方程式を求めなさい．

(4) 前問の結果から，二本の円筒形導体を通して z 方向に伝わる交流電流の伝播速度を C_0，L_0 を含む式で表しなさい．

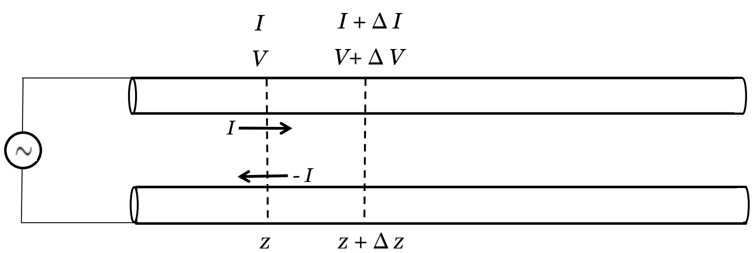

図 2:

II

x 軸上を動く質量 m，エネルギー E の量子力学的粒子について考えよう．図 1 のように，x 軸の原点 $x=0$ をリングではさむと，デルタ関数のポテンシャル $V(x) = -V_0\ \delta(x)$（ただし $V_0 > 0$）が発生した．

1. $x=0$ で，波動関数 $\phi(x)$ は連続である．$\phi(x)$ の微分は次式を満たすことを示せ．ただし，ε は正の微小量である．

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} \quad = \quad -\frac{2m}{\hbar^2}V_0 \cdot \phi(x=0)$$

2. エネルギー $E<0$ の束縛状態の固有値と規格化された固有関数を求めよ．

3. 上問 2 の束縛状態に対して，座標と運動量の不確定性 Δx，Δp をそれぞれ求めよ．ここで $(\Delta x)^2 = \langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\rangle$ 等で，$\langle\quad\rangle$ は固有関数による期待値を示す．

4. エネルギー $E>0$ の粒子が，左 $(x=-\infty)$ から入射した．この時の粒子の透過率 T と反射率 R を求め，それぞれをエネルギー E の関数として図示せよ．

5. エネルギー $E>0$ の粒子が，単位時間あたり N 個，ビーム状に連続的に左から入射している場合，デルタ関数のポテンシャルをつくっているリングが粒子から受ける力の大きさ F を求めよ．ただし N は十分大きいとし，粒子間の相互作用や同種粒子に起因する量子論的相関は考えなくて良い．また，単位時間あたりの運動量変化が古典的な力に対応するとする．
　次に，F をエネルギー E の関数として図示せよ．特に F が最大となるエネルギー値はいくつか．

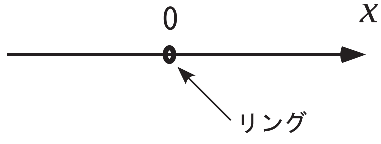

図1

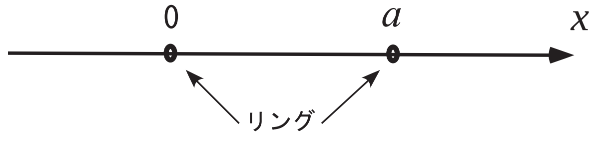

図2

図 2 のように，x 軸の位置 $x=a$ をもう一つのリングではさむと，ポテンシャルは
$V(x)=-V_0\ \delta(x)-V_0\ \delta(x-a)$ （ただし $V_0>0$，$a>0$）になった．

6. エネルギー $E>0$ の粒子が，左 $(x=-\infty)$ から入射した場合，完全透過（透過率 $T=1$）が起こるためのエネルギーの条件を求めよ．

7. 完全透過を起こすエネルギーの最も小さい値を E_1 とする．V_0 がゼロから徐々に大きくなっていく時，E_1 はどのように変化するかを，横軸を V_0，縦軸を E_1 としてグラフに描け．特に，特徴的なエネルギー値をグラフに書くこと．