平成２９年度
大学院理学研究科博士前期課程　学力検査問題
(基盤理学専攻・物理学コース)

専門科目(２)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと．

2. 問題は全部で４ページある．

3. 問題 I, II の両方に解答すること．

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること．１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない．また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること．

5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）．

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない．

I

1. (1) ２次元平面内で運動している質点の極座標 (r, φ) における加速度の動径成分と方位成分を書き表せ.

図１のように，振り子（おもりの質量 m，糸の長さ ℓ）の支点を原点，鉛直線からの振れ角を φ とする極座標 (ℓ, φ) を考える．糸の長さ ℓ は時間と共に変化させることが可能であるとし，振り子は糸がたるむことなく鉛直面内で運動しているとする．ここで，重力加速度の大きさを g，運動に伴う抵抗，糸の質量，おもりの大きさは無視できるとする.

(2) 糸の張力を R として，おもりの動径方向および方位方向の運動方程式を書き表せ.

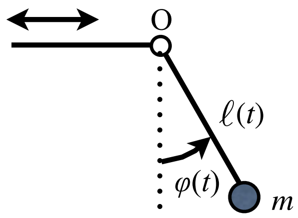

図 1:

糸の長さ ℓ が変化しない場合で，初期値として $\varphi(0) = 0$，$\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ を与えた場合の運動を考える.

(3) 振り子が微小振動している場合の $\varphi(t)$ を求めよ．更にその概略を図示せよ.

以下では，再び φ が微小と限らない運動をしている振り子を考える.

(4) 糸がたるんでいない運動における張力と角速度を φ の関数として書き表せ.

(5) 次の運動がおこる ω_0 の範囲を求めよ.

(a) 振り子が支点 O の高さ以下で振動する.

(b) 振り子が支点と最高点の間の高さまで上がり，糸がたるんで質点が放物運動をする．ここで最高点とは，糸がたるまず運動したときの，おもりが支点の真上まできたときの点である.

2. 図 2 のように，水平面と θ_0 の傾きをなす斜面がある．その斜面上の一点 O から斜面に垂直に柱を立てる．その柱上の点 A($\overline{\mathrm{OA}} = \ell/2$) から糸の長さ ℓ，おもりの質量 m の振り子をつるした．糸がたるむことなく，おもりは斜面上を平衡点のまわりで振動運動しているとする．ここで，重力加速度の大きさを g，運動に伴う抵抗，糸の質量，おもりの大きさ，斜面からの摩擦力は無視できるとする．

(1) 点 O を原点，点 A を含む直線を z 軸とする円柱座標 (r, φ, z) を用いて，おもりの運動方程式を書き表せ．必要であれば，糸の張力 R，面の垂直抗力 N を用いてもよい．

(2) 振り子が微小振動している場合の振動周期を求めよ．

次に斜面からの摩擦力が無視できない場合を考える．ここで動摩擦係数は μ' とし，再びおもりは斜面上で φ が微小と限らない振動運動をしているとする．

(3) 力学的エネルギー E が時間とともに小さくなる，つまり $\frac{dE}{dt} \leq 0$ となることを示せ．更に，十分時間が経過したときの運動も含め，おもりの運動の様子を簡潔に記述せよ．

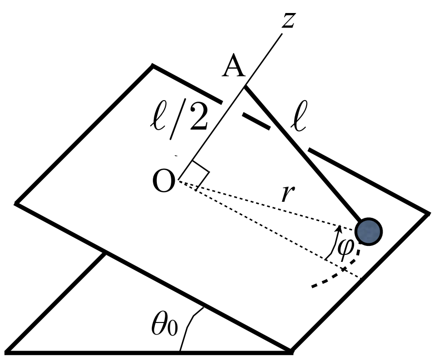

図 2:

II

表面に分子サイズの細孔を多数もつ固体があり，ある気体分子を細孔に吸着する性質をもつ．この固体表面が圧力の低い気体と接しているときの平衡状態を考える．細孔は気体分子を 1 個だけ吸着することができ，吸着された分子のエネルギーは

$$\epsilon = -v \quad (v > 0)$$

であるとする．

固体表面と接するまわりの気体を，エネルギーと気体分子を供給する熱・粒子だめと見なし，グランドカノニカル分布を用いて平衡状態を考える．グランドカノニカル分布は，注目する系が粒子数 N_i，エネルギー E_i のエネルギー固有状態 i にある確率が

$$p_i = \frac{\exp\left[\beta(\mu N_i - E_i)\right]}{\Xi(\beta, \mu)}$$

であるような分布である．ここで μ と β は，それぞれ熱・粒子だめの化学ポテンシャルと逆温度 $(k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ であり，また，$\Xi(\beta, \mu)$ は大分配関数

$$\Xi(\beta, \mu) = \sum_i \exp\left[\beta(\mu N_i - E_i)\right]$$

である．必要なら Stirling の公式

$$N! \simeq \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

を用いてよい．

まず，細孔が 1 個だけある場合を考える．

1. 細孔に吸着された分子系の大分配関数を求めなさい．

次に，細孔を L 個もつ固体表面を考える．吸着された分子間に相互作用はないものとする．

2. 吸着された分子系の大分配関数を求めなさい．

3. 吸着された分子系について，分子数 N と全エネルギー E を β, μ, L の関数として求めなさい．

4. まわりの気体を単原子分子理想気体とみなし，その化学ポテンシャル μ を逆温度 β と圧力 P の関数として求めなさい．必要なら理想気体の Helmholtz 自由エネルギー

$$F(\beta, V, N) = -\frac{N}{\beta} \log\left\{\frac{V}{N} e \left(\frac{A}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}, \qquad A = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$$

を用いなさい．m は気体分子の質量である．

5. 吸着率 $\eta \equiv \dfrac{N}{L}$ をまわりの気体の逆温度 β と圧力 P の関数として求めなさい．また，β を一定に保って P を変化させたときの吸着率の変化の様子を簡潔に説明しなさい．

次に，吸着された分子間に斥力が働く場合を考える．L 個の細孔が等間隔で直線上に並んでおり，隣り合った細孔に吸着された分子間に斥力が働くとする．斥力によるエネルギーを

$$U = \sum_{i=1}^{L} w n_i n_{i+1}, \qquad 0 < w < v$$

とする．ここで，n_i は i 番目の細孔に吸着された分子数で，0 または 1 という値をとる．また，周期境界条件を採用し，$n_{L+1} = n_1$ であるとした．この系の大分配関数は，

$$\Xi(\beta, \mu, L) = \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_L=0}^{1} \prod_{i=1}^{L} T(n_i, n_{i+1}) = \mathrm{Tr}\left\{\mathsf{T}^L\right\}$$

という形に書ける．$T(n_i, n_{i+1})$ は，$n_1, \ldots, n_L$ のうち n_i と n_{i+1} のみを含む量で，n_i と n_{i+1} がそれぞれ 0 と 1 の二つの値をとることから，2×2 行列の四つの成分と見なすことができ，このことを用いて，大分配関数が 2×2 対称行列 T で表されている．行列 T の 2 つの固有値を $\lambda_+ > \lambda_-$ とすると，熱力学的極限 $L \to \infty$ では

$$\frac{1}{L} \log \Xi(\beta, \mu, L) = \frac{1}{L} \log \mathrm{Tr}\left\{\mathsf{T}^L\right\} = \frac{1}{L} \log\left({\lambda_+}^L + {\lambda_-}^L\right) \to \log \lambda_+$$

である．

6. v が十分大きいとき，十分低温では

$$\lambda_+ \approx \frac{1}{2} \mathrm{e}^{\beta(\mu+v-w)} \left[1 + \sqrt{1 + 4\mathrm{e}^{-\beta(\mu+v-2w)}}\right]$$

である．吸着率 $\eta \equiv \dfrac{N}{L}$ をまわりの気体の逆温度 β と圧力 P の関数として求めなさい．さらに，圧力 P を一定に保って温度を変化させたときの吸着率の変化を考察すると，分子間の斥力が弱いとき ($w \ll v$) は，十分低温で吸着率 $\eta \approx 1$ となるが，w がある値 w_c を超えると，$\eta \approx \eta_\mathrm{c} < 1$ となる．w_c と η_c を求めなさい．

7. 行列 T を求めなさい．

$$\sum_{i=1}^{L} n_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{L} n_i + \sum_{i=1}^{L} n_{i+1}\right)$$

と変形するとよい．