平成３１年度
大学院融合理工学府博士前期課程　学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目 (１)(物理学)

試験時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。

2. 問題は全部で４ページある。

3. 問題 I, II の両方に解答すること。

4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。

5. 全ての解答用紙の所定欄に，問題番号と受験番号を記入すること(氏名を記入してはいけない)。

6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図 1 に示すように質量 m, 半径 a の一様な半円板がある。この円板の厚さは十分に薄いとして以下の問いに答えよ。

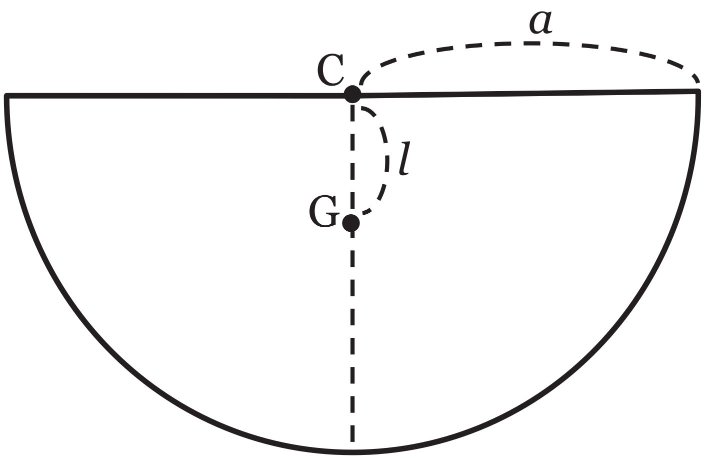

図 1

1 半円板の重心を G とする。半円板の上辺の中心 C から G までの距離 l を求めよ。

2 半円板の重心 G を通り，半円板に垂直な軸に関する慣性モーメント I_{G} を求めよ。必要ならば平行軸の定理を証明なしに用いてよい。

水平な床面に，この半円板を静かに置く。半円板には鉛直下向きに重力（重力加速度の大きさ g）が働いており，半円板は常に同一の鉛直面内にあるものとする。半円板を鉛直面内で角度 θ_0（$|\theta_0| < \pi/2$）傾けて放すと，半円板は床と滑らずに運動を始めた。図 2 のように，ある瞬間，角度が θ の時に半円板と平面との接触点を A とする。半円板が滑らない場合，半円板の運動は A を中心とした瞬時回転となり，A 周りの回転の角速度の大きさは $|\dot{\theta}|$ になる。

3 接触点 A まわりの半円板の慣性モーメント $I_{\mathrm{A}}(\theta)$ が，

$$I_{\mathrm{A}}(\theta) = (\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\theta)ma^2$$

となることを示せ。

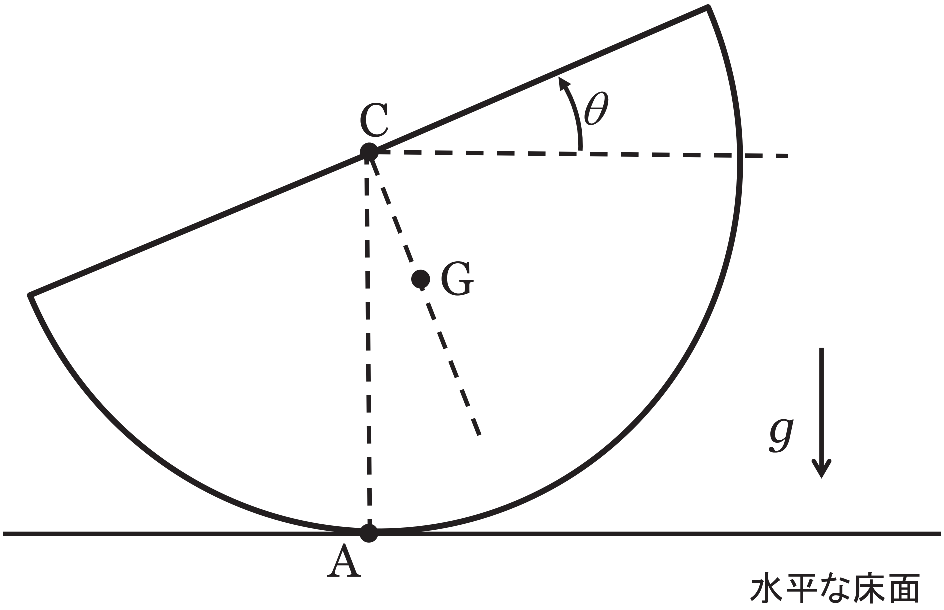

図２

4 半円板の持つ運動エネルギー T_{A} を $I_{\mathrm{A}}(\theta)$，θ，角速度 $\dot{\theta}$ のうち，必要な記号を用いて示せ。ただし，この設問のみ解答に記号 $I_{\mathrm{A}}(\theta)$ を用いよ。

5 半円板の角度が $\theta = 0$ になる瞬間における，角速度 $\dot{\theta}$ の絶対値 $|\dot{\theta}|$ を求めよ。必要なら力学的エネルギー保存則を証明なしに用いてよい。

6 力学的エネルギー保存則を微分するなどして，角度 θ に関する運動方程式を求めよ。ただし，θ_0 が非常に小さい場合 ($|\theta_0| << 1$) を考え, θ および $\dot{\theta}$ に関して線形近似して 2 次以上の項を無視する。

7 前問より，半円板の運動は単振動と見なせる。この振動の周期を求めよ。

II

i 番目の素子が量子数 $n_i(n_i = 0, 1, 2, \cdots)$ で特徴づけられ，そのエネルギー ϵ_i が

$$\epsilon_i = an_i$$

で表されるとする。ただし，a は正の定数とする。このような素子 N 個 $(i = 1, 2, \cdots, N)$ から成る系の熱平衡状態をカノニカル分布を用いて考える。ここで，N は 1 より十分大きいとする。このときの系のエネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i = \sum_{i=1}^{N} an_i$$

と書ける。以下の問いに答えよ。

1. 分配関数 Z は逆温度を $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$（$k_\mathrm{B}$ はボルツマン定数，T は絶対温度）として，

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \exp\left(-\beta E\right)$$

と定義できる。Z を求めよ。

2. 系の自由エネルギー F を求めよ。

3. 系の内部エネルギー（エネルギーの期待値）$\langle E \rangle$ を求めよ。

4. 系の熱容量 C を求めよ。

5. 熱容量 C の $k_\mathrm{B}T \ll a$，および $k_\mathrm{B}T \gg a$ の極限での漸近形を求めよ。また，熱容量の概形を，温度 T の関数としてグラフに描け。

6. $n_i = k$ となる素子の数の期待値を $\langle N_k \rangle$ とする。$\dfrac{\langle N_k \rangle}{N}$ を求めよ。

7. 逆温度 β を変化させたときの $\dfrac{\langle N_k \rangle}{N}$ の最大値，および $\dfrac{\langle N_k \rangle}{N}$ が最大値をとるときの逆温度 β を求めよ。

8. $k = 0, 1, 2$ について $\dfrac{\langle N_k \rangle}{N}$ の概形を，温度 T の関数として 1 つのグラフに描け。$T \to 0$ および $T \to \infty$ での極限値，極値および極値をとる温度の大小が明確にわかるように描くこと。

次に量子数 $n_i (n_i = 0, 1, 2, \cdots)$ をとるときのエネルギー ϵ_i が n_i の偶奇により異なり

$$\epsilon_i = \begin{cases} am & (n_i = 2m) \\ am + b & (n_i = 2m + 1) \end{cases}$$

で表される系を考える。ただし、m は 0 以上の整数であり、$0 < b < a/2$ とする。以下の問いに答えよ。

9. このときの分配関数 Z を求めよ。

10. 系の内部エネルギー $\langle E \rangle$ を求めよ。

11. 系の熱容量 C を求めよ。

12. $b \ll a$ のとき，熱容量 C の概形を，温度 T の関数としてグラフに描け。なぜそのような形になるのかを述べれば，概形を描くための計算はしなくてもよい。