

平成31年度
大学院融合理工学府博士前期課程 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目(2)(物理学)

試験時間 120分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で4ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また、問題 I, II のそれぞれについて1枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙の所定欄に、問題番号と受験番号を記入すること(氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

1. 図のような抵抗（抵抗値 R ）とコイル（自己インダクタンス L ）からなる回路に関して以下の問いに答えよ。なお，回路中の端子 b および端子 d の電位をゼロとする。

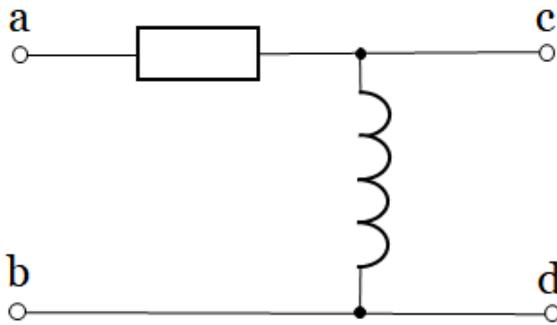
(1) 時刻 t における端子 a, b 間の電圧 V_{ab} を

$$V_{ab} = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ V_0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

とした。 $t \geq 0$ での端子 c, d 間の電圧を時刻 t の関数として求めよ。

(2) 端子 a, b 間に角振動数 ω ，振幅 V_1 の交流電圧を加えた。十分に時間が経過した後の端子 c, d 間に現れる交流電圧の振幅の大きさを V_{cd} とするとき，振幅の比 $\left| \frac{V_{cd}}{V_1} \right|$ を ω の関数として求めよ。また，この ω と $\left| \frac{V_{cd}}{V_1} \right|$ との関係をグラフに図示せよ。

(3) (2) のとき，この回路で消費される電力（時間平均値）を求めよ。



図

2. ある導体に対して角振動数 ω の電磁波（平面波）が垂直に入射するときを考える。この導体の表面は z 軸に垂直な平面で、導体内部を $z \geq 0$ とし、 $z < 0$ の領域は真空とする。なお、この導体の電気伝導度を σ 、透磁率を μ 、誘電率を ε とし、この導体内部における伝導電流はオームの法則で表わされるものとして以下の問いに答えよ。

(1) 導体内部の電荷密度を ρ 、伝導電流密度を \mathbf{i} とする。電荷の保存則 $\text{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ を用いて、 ρ が以下の方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(2) (1) より、導体内部での電荷密度は $\rho = 0$ としてよいことを踏まえて、この導体内部における電場 \mathbf{E} および 磁束密度 \mathbf{B} が満たすマクスウェルの方程式を記せ。

(3) この導体内部における電磁波の電場 \mathbf{E} は以下の関係式を満たすことを示せ。

$$(\Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

(4) この導体内部での電磁波の波数を k とし、導体内部 $z \geq 0$ での電場を $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ と表記する。導体内部での電磁波の波数 k と角振動数 ω との関係を表わす式を求めよ。

(5) $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$ であるとき、導体の表皮厚さ δ (電磁波の振幅が $1/e$ 倍となる侵入距離) を求めよ。

(6) この導体の電気伝導度 σ は $2.7 \times 10^8 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ 、導体内部の透磁率は真空の透磁率 $1.2 \times 10^{-6} \text{NA}^{-2}$ を用いてよいものとする。電磁波の振動数が 1.0GHz のとき、電磁波に対する表皮の厚さを有効数字 1 桁で計算せよ。

II

量子力学に関する以下の問いに答えよ。

ここでは、簡単のために次のような Dirac の表記法を用いる。 $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)g(x)$,
 $\langle f|\hat{A}|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)\{\hat{A}g(x)\}$ 。ただし \hat{A} は演算子である。また、必要があれば次の結果を使ってよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2n} e^{-ax^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{1}{a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^{\infty} dx x^n e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 0! = 1, a > 0)$$

1. Hamiltonian \hat{H} の固有値を小さい方から $\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \dots$, 対応する規格化された固有関数を $u_0, u_1, u_2 \dots$ とし、また各固有値に縮退はないものとする。

(1) 時刻 t の状態を $\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)u_n$ とする。時刻 $t = 0$ において $b_n(t=0) = c_n$ (ただし c_n は定数) である時、 $b_n(t) = c_n e^{-i\frac{\varepsilon_n t}{\hbar}}$ となることを示せ。

(2) 状態 Ψ に対し、 $E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$ と定義する。 u_0 に直交する任意の状態 Ψ に対し、 $E[\Psi] \geq \varepsilon_1$ となることを示せ。

2. Hamiltonian が $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$ で与えられる 1 次元調和振動子の運動について考えよう。ここで m は質量、 ω は振動子の角振動数である。

この系の基底状態と第 1 励起状態はそれぞれ、 $u_0(x) = N_0 e^{-\alpha x^2}$, $u_1(x) = N_1 x e^{-\alpha x^2}$ の関数形をしている。ただし $N_0, N_1 > 0$ とする。また、各々のエネルギー固有値を $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ とする。

(1) $u_0(x)$ を Schrödinger 方程式に代入することで、 α , および ε_0 を求めよ。また、規格化定数 N_0 を α を用いて表せ。

時刻 $t = 0$ において状態が $\Psi(x, t=0) = c_0 \cdot u_0(x) + c_1 \cdot u_1(x)$ (ただし c_0, c_1 は 0 以上の実数で $c_0^2 + c_1^2 = 1$ を満たす) である場合、時刻 t の状態 $\Psi(x, t)$ は 1. (1) の結果を用いて求めることができる。時刻と共に位置やそのゆらぎがどのように変化するかを調べてみよう。

以下では、 $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, $N_1 = \left(\frac{32\alpha^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$ となることを使ってよい。

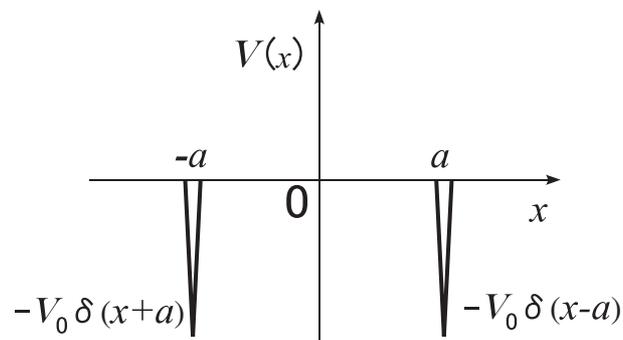
(2) $\Psi(x, t)$ に対して、位置の期待値 $\bar{x}(t) = \langle \Psi | \hat{x} | \Psi \rangle$ と、運動量の期待値 $\bar{p}(t) = \langle \Psi | \hat{p} | \Psi \rangle$ を求めよ。答えに c_1 を用いないこと。また、 $\bar{x}(t)$ の振動の振幅が最大および最小となる c_0 の値を求めよ。

(3) $\Psi(x, t)$ に対して、位置の不確定性 $\Delta\bar{x}(t)$ を求めよ。ここで $(\Delta\bar{x}(t))^2 = \langle \Psi | (\hat{x} - \bar{x}(t))^2 | \Psi \rangle$ である。答えに c_1 を用いないこと。また、 $\bar{x}(t)$ の振動の振幅が最大となる場合の $\bar{x}(t)$ および $\Delta\bar{x}(t)$ を、時刻 t の関数としてグラフに描け。

3. x 軸上を動く質量 m の粒子の束縛固有状態について考えよう。デルタ関数の引力ポテンシャルが1つあると束縛固有状態が1つ存在する。ポテンシャルが図のように2つのデルタ関数からなる $V(x) = -V_0\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\}$ (ただし a, V_0 は正の定数) の場合には、 a がある値 a_0 より大きければ束縛固有状態は2つ存在する。この値 a_0 の近似値(上限値)を、1. (2) の結果を用いて求めてみよう。

(1) 第1励起状態の固有関数は奇関数なので、試行関数として $\Psi(x) = xe^{-\alpha|x|}$ (α は正の定数) を用いて、1. (2) の $E[\Psi]$ を求めよ。

(2) 3. (1) において、特に簡単のために $\alpha = \frac{1}{a}$ とする。この時の a_0 の近似値を求めよ。



図