２０２２年４月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目（１）

検査時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

半径 a の円板を切り取った, 角度 $2\phi\,(0<\phi<\pi)$ の扇形の剛体がある (図 1)。その質量を M とし，質量面密度は一様とする。また，扇形の頂点 (切り取る前の円板の中心) を O とする。

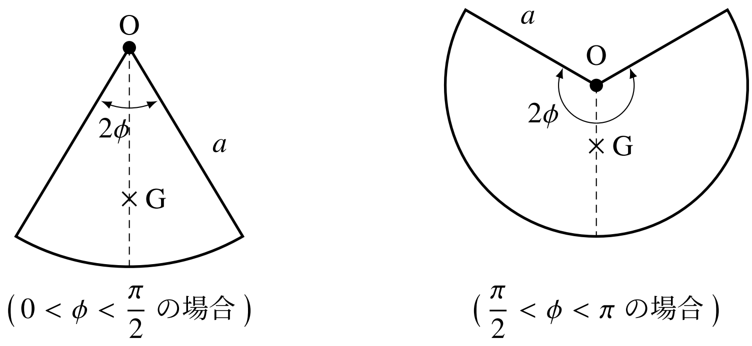

図 1

なお, 解答に関数 $j(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を用いてよい。

1. この扇形剛体の力学的性質を調べる。一般に, N 個の質点から成る質点系において, 質点 i の質量を m_i, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$ とすると $(i=1,2,\cdots,N)$, 重心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ 及び z 軸の周りの慣性モーメント I_z は

$$\boldsymbol{R}:=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},\quad I_z:=\sum_{i=1}^{N} m_i\,(x_i^2+y_i^2)$$

と定義される。

(1) 剛体の重心を G とする。距離 $\overline{\mathrm{OG}}$ を求めなさい。また，この距離を d として, d の ϕ の関数としての振舞い (すなわち $d(\phi)$) をグラフに図示しなさい。

(2) O を通り剛体に垂直な軸の周りの, 剛体の慣性モーメント I を求めなさい。

図 1 のような扇形剛体を, O を通る軸を水平に保って固定し, 軸の周りに鉛直面内を回転できるように設置する (図 2,3)。扇形の端点 P に糸を取り付け, 糸の他端に質点をつないで垂らす。糸は十分に長く, 質量を無視でき, たるむことがないとする。質点の質量を m, 重力加速度の大きさを g, また, 重心 G が O の鉛直下方にあるときを基準として剛体の回転角を θ とする。なお, 以下では特に断らない限り, **1. (2)** で定義された I, および ϕ の代わりに **1. (1)** で定義された d をそのまま用いて解答してよい。

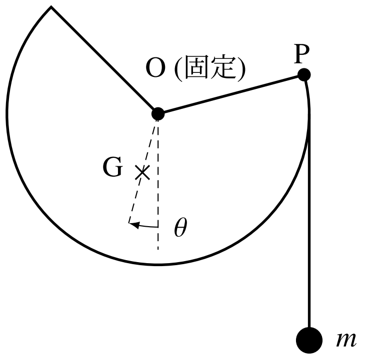

図 2

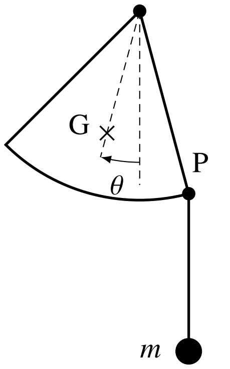

図 3

2. 扇形剛体が $\dfrac{\pi}{2} < \phi < \pi$ を満たすとし, 糸が剛体に巻きつきながら垂れ下がり, 鉛直を保っている場合を考える (図 2)。このとき, θ の範囲は $\left(-\phi - \dfrac{\pi}{2} <\right) \theta < \phi - \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dot{\theta}$ を変数として, この系の運動エネルギーを書き下しなさい。

(2) この系のポテンシャル $U(\theta)$ を書き下しなさい。ただし, $U(\theta = 0) = 0$ とする。

(3) θ についての運動方程式を導きなさい。

(4) 平衡点での角度を $\theta = \theta_0$ とする。$0 < \theta_0 < \phi - \dfrac{\pi}{2}$ のとき, θ_0 を求めなさい。

(5) $0 < \theta_0 < \phi - \dfrac{\pi}{2}$ であるための m の範囲を求めなさい。本問の解答は, ϕ を露わに用い, **1. (1)** の d を使わない表式にすること。

(6) $0 < \theta_0 < \phi - \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $\theta = \theta_0$ の近傍での質点の鉛直方向の微小振動の角振動数を求めなさい。

3. θ の範囲が $\theta > \phi - \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考え $\left(\phi > \dfrac{\pi}{2}\right.$ である必要はない), 平衡の位置について調べる。平衡位置で質点は P の鉛直下方にあり (図 3), その位置は剛体の回転角 θ により定まる。

(1) θ を変数として, この系のポテンシャル $U(\theta)$ を書き下しなさい。ただし, $U(\theta = 0) = 0$ とする。

(2) 平衡点 θ_0 を求めなさい。**1. (1)** の d を用いず, ϕ を使って解答すること。

(3) $m \gg M$ および $m \ll M$ の場合に θ_0 がどのような値に漸近するか述べなさい。ただし, 後者の場合 $(0 <)\, \phi < \dfrac{\pi}{2}$ と仮定してよい。

II

A　真空中に設置した円電流が作る磁場について，以下の問いに答えなさい。解答には，原点にある電流素片 $I\Delta\boldsymbol{s}$ が位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点に作る磁場を表す式（ビオ・サバールの法則）

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

を用いてよい。μ_0 は真空の透磁率である。

図 1 のように z 軸に垂直な面に設置した原点 O を中心とする半径 a の円電流 I を考える。

1. z 軸上の点 P $(0,0,z)$ での磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の z 成分を求めなさい。

2. この円電流から遠く離れた点 Q (x,y,z) での磁束密度の z 成分を求めなさい（図 2）。$r_0 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とし，$|x|,|y|,|z| \gg a$ として近似しなさい。

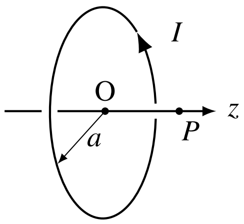

図 1

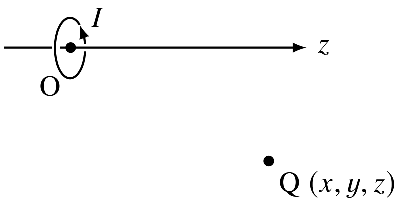

図 2

図 3 のように，z 軸に垂直で，それぞれ点 A $(0,0,-b)$ と B $(0,0,b)$ を中心とする 2 つの半径 a の円形電流があり，等しい電流 I が同じ向きに流れている。

3. z 軸上の点 P $(0,0,z)$ での磁束密度の z 成分 B_z を求めなさい。

4. 図 3 のような場合，z 軸上の原点近くで B_z をほぼ均一にすることができる。そのための条件を微小な z $(z \ll a,b)$ の場合における 2 次までのテイラー展開

$$B_z(z) \simeq B_z(0) + B_z'(0)z + \frac{B_z''(0)}{2}z^2$$

を用いて考える。$B_z(0), B_z'(0), B_z''(0)$ をそれぞれ答えなさい。また，a を固定した場合に z の変化に対して $B_z(z)$ の変化を最小にする b を答えなさい。

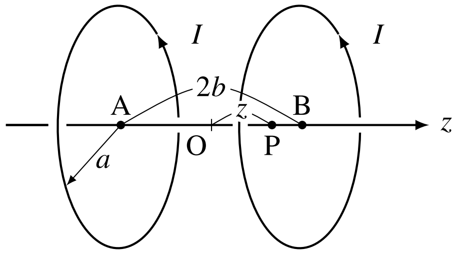

図 3

B　図 4 のような半径 a の導体を芯とし，半径 b の導体外殻を持つ同軸ケーブルを考える。2 つの導体間は誘電率 ε，透磁率 μ の誘電体で満たされている。以下の問いに答えなさい。

1. 同軸ケーブルは図 5 のように微小なコンデンサーとコイルが連続して分布したものとして考えることができる。ケーブルの単位長さあたりのキャパシタンスとインダクタンスをそれぞれ C, L とすると，微小区間 Δx のキャパシタンスとインダクタンスはそれぞれ $C\Delta x, L\Delta x$ である。ここで時刻 t，位置 x での電圧を $V(t,x)$ とし，x と $x+\Delta x$ 間のコイルに流れる電流を $I(t,x)$ と定義する。点 A において，$I(t,x)$ と $I(t,x+\Delta x)$ の関係式を書き下しなさい。また，$V(t,x)$ と $V(t,x+\Delta x)$ の関係式を書き下しなさい。解答には C, L, Δx, $V(t,x)$, $V(t,x+\Delta x)$, $I(t,x)$, $I(t,x+\Delta x)$ とそれらの時間微分のみを使ってよい。

2. 問 1 で求めた関係を用い，Δx を無限小に近づけたとき，電圧 $V(t,x)$ が波動方程式,

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

に従うことを示しなさい。また，電圧がケーブルを伝搬する位相速度である v を L と C を用いて表しなさい。

3. 図 4 の構造を持つ同軸ケーブルが十分に長い場合において単位長さ当たりのキャパシタンス C を求めなさい。

4. 位相速度 v を同軸ケーブルを特徴づけるパラメーター a, b, ε, μ のみを用いて表し，より位相速度を速くするにはどういった特徴をもつ同軸ケーブルをデザインするとよいか考察しなさい。このケーブルの単位長さ当たりのインダクタンス L を

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

としてよい。

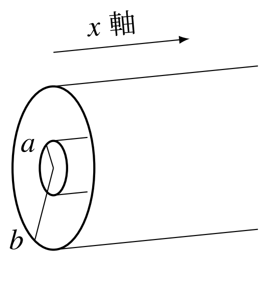

図 4

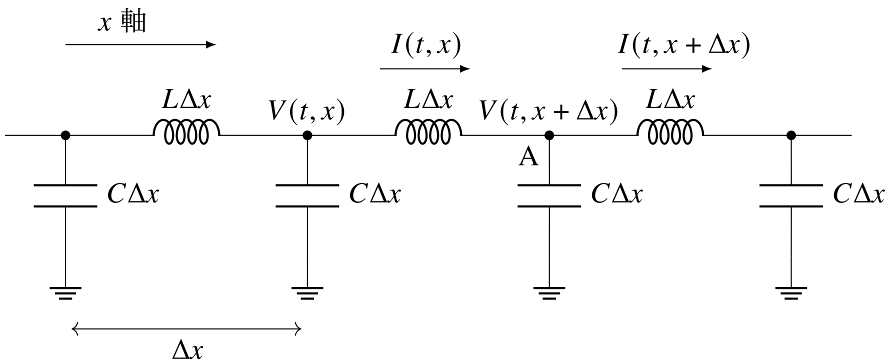

図 5