２０２３年４月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目（２）

検査時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて 1 枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

ハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

と表せる 1 次元古典的振動子が N 個集まった系が温度 T の熱平衡状態にある。N は十分大きく，系を統計力学的に考えることができる。ここで，m は質量，p は運動量，q は座標，$V(q)$ はポテンシャルである。また，k_B をボルツマン定数，逆温度を $\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ と定義する。

1. 準備のため，ガウス積分に関する公式を導こう。なお，問題中の定積分が収束すること，微分と積分の順序が交換できることは証明せず用いてよい。また，公式を導けなくても以降の問いで用いてよい。

[1] ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を示しなさい。ただし，$a > 0$ である。

[2] 前問を用いて公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp\left(-ax^2\right) dx = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を示しなさい。ただし，

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$

である。また，n は自然数，$a > 0$ である。

2. 固有角振動数 ω (> 0) の古典的調和振動子を考える。すなわち，ポテンシャルは

$$V(q) = \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

と表せる。

[1] この系の分配関数 Z は 1 振動子の分配関数

$$z = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\mathcal{H}}\, dq\, dp$$

を用いて $Z = z^N$ と表せる。Z を求めなさい。ただし，h はプランク定数である。

[2] この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を β の関数として求めなさい。

[3] この系のエネルギーの期待値 (内部エネルギー) U を β の関数として求めなさい。

[4] この系の熱容量 C を求めなさい。

[5] この系が熱平衡状態にあるときの $\langle q\rangle$ および $\left\langle q^2\right\rangle$ を求めなさい。

3. 次に，**2.** のポテンシャルに q^4 に比例する微小項を摂動的に加えた非調和振動子を考える。その非調和振動子のポテンシャルは

$$V(q) = \frac{m\omega^2}{2} q^2 \left(1 + \epsilon \frac{m\omega^2}{A} q^2\right)$$

と表せるとする。ここで A はエネルギーの次元をもつ正の定数である。以降では，$0 < \epsilon \ll 1$ として，すべて ϵ の 1 次まで求めなさい。

[1] 1 振動子の分配関数 z を求めなさい。

[2] この系のエネルギーの期待値 (内部エネルギー) U を β の関数として求めなさい。

[3] この系の熱容量 C を求めなさい。

[4] この系が熱平衡状態にあるときの $\left\langle q^2 \right\rangle$ を求めなさい。

II

量子力学的振動子，粒子についての以下の問いに答えよ。

A. 1 次元の量子力学的調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

で与えられる。右辺の第 1 項が運動エネルギー，第 2 項がポテンシャルエネルギーである。ここで，$\hbar$ はディラック定数，m は振動子の粒子の質量，ω は角振動数の次元を持つ正の定数である。x は粒子の位置であり，$\hat{x}$ は対応する位置演算子である。

[1] 以下のように 2 つの演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を定義する。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{2}$$

ここで，$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ は運動量演算子である。上の 2 つの演算子の交換関係

$$\left[\ \hat{a},\ \hat{a}^\dagger\ \right] = 1 \tag{3}$$

を示せ。これを示す際に，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ の正準交換関係を利用してよい。

[2] ハミルトニアン (1) の $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いた表示を導出せよ。位置や運動量を含まない簡潔な表示を導くこと。

[3] 1 次元系における任意の演算子 $\hat{A}$ に対して，そのエルミート共役な演算子 $\hat{B}$ は以下の関係式を満たすものとして定義する。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^* \hat{B}\psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}\phi)^* \psi\, dx \tag{4}$$

ここで，ϕ と ψ は境界条件 $\phi(\pm\infty) = \psi(\pm\infty) = 0$ を満たす任意の関数とする。この定義式を用いて，$\hat{a}^\dagger$ が $\hat{a}$ のエルミート共役演算子であることを示せ。

[4] 演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の $n+1$ 番目の固有値と固有関数を各々 N_n と $\phi_n(x)$ と書くことにする。$\phi_n(x)$ が規格化されているとすると、固有値 N_n は

$$N_n = N_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)^* \phi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)^* N_n \phi_n(x) dx \tag{5}$$

とわざわざ書き換えることができる。この式とエルミート共役の定義式を利用して $N_n \geq 0$ を示せ。

[5] 問 **[1]** の交換関係を利用して，$\hat{a}^\dagger \phi_n$ は $\hat{N}$ の固有関数でその固有値は $N_n + 1$ であること，および，$\hat{a}\phi_n$ は $\hat{N}$ の固有関数でその固有値は $N_n - 1$ であることを示せ。

問 **[5]** から，ϕ_n に $\hat{a}$ または $\hat{a}^\dagger$ を何度もかければ，$\hat{N}$ の固有値が N_n から整数だけずれた固有関数を幾らでも生成することができる。つまり，$\hat{N}$ の可能な固有値を

$$\cdots, N_n + 2,\ N_n + 1,\ N_n,\ N_n - 1,\ N_n - 2,\ \cdots \tag{6}$$

と羅列できる。しかし一方で，問 **[4]** から、$\hat{N}$ の固有値は非負であることが分かっている。従って，$\hat{a}\phi_0(x) = 0$ を満たす $\hat{N}$ の固有値ゼロに対応する固有関数 $\phi_0(x)$ が存在しなければならない。もし $\hat{N}$ の固有値の下限が非整数値である場合，その固有関数に $\hat{a}$ を何度もかけることで負の固有値に対応する固有関数を生成できてしまうからである。これを踏まえて，以下の問 **[6][7]** に答えよ。

[6] $\hat{N}$ の最低固有値 $(N_0 = 0)$ に対応する固有関数 $\phi_0(x)$ を求めよ。固有関数を規格化する必要はない。

[7] 前問までの結果から，調和振動子のエネルギー固有値を求めよ。

B. 2 次元 x-y 面内 $(-\infty < x, y < \infty)$ の量子力学的粒子を考える。粒子は，質量 m と電荷 q をもつ。x-y 面に垂直な一様磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ が印加されている。

[1] 古典電磁気学において、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を

$$A_x = 0, \qquad A_y = Bx, \qquad A_z = 0 \tag{7}$$

と設定すると，一様磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が再現できることを示せ。

[2] 問 **[1]** のベクトルポテンシャルを用いて，力学的運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$ を

$$(\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y) = \left(\hat{p}_x - qA_x(\hat{x}, \hat{y}),\ \hat{p}_y - qA_y(\hat{x}, \hat{y})\right) \tag{8}$$

で定義する。ここで，荷電粒子の位置演算子と運動量演算子をそれぞれ $(\hat{x}, \hat{y})$ と $(\hat{p}_x, \hat{p}_y)$ で定義した。さらに，$\hat{P} = \hat{\Pi}_x$ と $\hat{Q} = -\frac{1}{qB}\hat{\Pi}_y$ を導入する。このとき，この 2 つの演算子の交換関係 $[\hat{Q}, \hat{P}]$ を求めよ。

[3] 磁場中荷電粒子のハミルトニアンを $\hat{P}$ と $\hat{Q}$ のみを使って表せ。さらに，このハミルトニアンと 1 次元調和振動子のハミルトニアンの関係から，この荷電粒子のエネルギー固有値を求めよ。