２０２４年４月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目（１）

検査時間　１２０分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で４ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。１枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また，問題 I, II のそれぞれについて１枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に，問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない)。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

図 1 のように，長さ l の棒の一端が点 O に固定されており，他端には質量 m のおもりが取り付けられている。時刻 t での鉛直線からの振れ角を $\varphi(t)$ とし，重力加速度の大きさを g とする。運動に伴う抵抗，棒の質量，おもりの大きさは無視でき，運動は点 O を含む鉛直面内のみで行われるものとする。

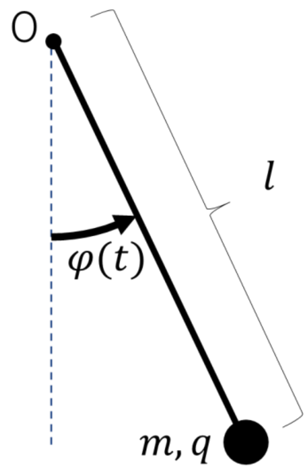

図 1

A.

1. この系のラグランジアンを φ と $\dot{\varphi}$ の関数として表せ。ただし，おもりが最下点にあるときを位置エネルギーの基準とする。

2. 振れ角 φ についての運動方程式を書き表せ。

3. $\varphi = 0$ の近傍でおもりが微小振動をしているとき，振動の角振動数 ω_0 を求めよ。

B. このおもりに電荷 $q(>0)$ を与えて帯電させ，水平方向に一様な交流電場 ($E_0 \cos \Omega t$) を印加した。ここで，E_0 および Ω は時間に依らない正の定数である。

1. 振れ角 φ についての運動方程式を書き表せ。

2. 初期値として $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ のときを考える。交流電場の振幅が小さく，$\varphi = 0$ の近傍でおもりが微小振動をしているとき，$\varphi(t)$ を求めよ。ただし，$\Omega \neq \omega_0$ とする。

C. 以下では，交流電場の振動数が十分大きく，$\omega_0 \ll \sqrt{\frac{qE_0}{ml}} \ll \Omega$ を満たす場合を考える。このとき，おもりの運動には角振動数 Ω で高速に振動する成分と，これと比べてゆっくりと変化する成分が現れる。そこで，振れ角を高振動数と低振動数の成分に分けて，

$$\varphi(t) = \eta(t) + \Phi(t) \tag{1}$$

と表す。ここで，高振動数の成分は $\eta(t) = \eta_0 \cos \Omega t$ と表すことができ，その振幅は十分小さい（$|\eta_0| \ll 1$）とする。また，$\Phi(t)$ は時間に対してゆっくりと変動する関数であり，ある短い時間 $T(\gg 2\pi/\Omega)$ の間では一定とみなせるものとする。以下では $|\Phi(t)|$ は十分小さいとは限らないことに注意せよ。

1. はじめに，高振動数の成分のみに注目する。前問 **B.1.** で求めた運動方程式に (1) 式を代入し，η_0 を求めよ。ここでは十分短い時間の運動を考えるものとし，Φ は時間に依らない定数と見做してよく，$\ddot{\Phi}$ は十分小さいとして無視してよい。

2. 次に，低振動数の運動を調べる。時間についての関数 $f(t)$ を時刻 t から $t+T$ の間で時間平均したものを $\overline{f(t)}$ と表す。低振動数の成分は時間 T の間では変動しないとみなせるから，$\overline{\Phi(t)} \cong \Phi(t)$ と近似することができる。 運動方程式の時間平均をとり，$\Phi(t)$ についての微分方程式を求めよ。

3. 上で求めた微分方程式は，$\ddot{\Phi} = -\frac{\partial U_{\mathrm{eff}}}{\partial \Phi}$ と書くことができる。ここで U_{eff} は有効ポテンシャルとみなすことができる。U_{eff} を求めよ。

4. ある閾値 E_c 以上に E_0 を大きくすると，低振動数の運動は $\Phi = 0$ が安定点ではなくなり，ある振れ角 $\Phi^*(\neq 0)$ の周りで振動するようになった。E_c を求めよ。

5. $E_0 > E_c$ のときの新たな安定点となる振れ角 Φ^* を求めよ。

6. $E_0 > E_c$ および $E_0 < E_c$ それぞれの場合における $U_{\mathrm{eff}}(\Phi)$ の概形を $-\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}$ の範囲で図示せよ。図中に具体的な値を記入する必要はない。

II

N 個の同じ分子が鎖状につながった系の熱平衡状態をカノニカル分布を用いて考える。それぞれの分子に $j = 1, 2, \cdots, N$ と番号をつけ，j 番目の分子の状態を 0 または 1 の値を取る変数 σ_j で指定できるものとする。以下では逆温度を $\beta = 1/(kT)$ とする。k はボルツマン定数である。

初めに，分子間に相互作用がはたらかない場合を考え，j 番目の分子のエネルギーが $\varepsilon\sigma_j$ $(\varepsilon > 0)$，系全体のエネルギーが

$$E(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon\sigma_j$$

であるとする。

1. この系の分配関数 $Z(\beta, N)$ を求めなさい。

2. 自由エネルギー $F(T, N) = -kT \log Z(\beta, N)$ とエントロピー $S(T, N)$ を求めなさい。

3. エネルギー $U(T, N)$ と熱容量

$$C(T, N) = \frac{\partial U(T, N)}{\partial T}$$

を求めなさい。また低温と高温の極限での熱容量の振る舞いを調べなさい。

4. 分子 1 個あたりのエネルギー

$$u = \frac{E(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)}{N}$$

の分散 $\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$ を求めなさい。また，$N \gg 1$ のときに u のゆらぎが小さいことを示しなさい。

次に，隣り合う分子間に相互作用がはたらく場合を考え，周期境界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ を取って，系のエネルギーが

$$E(\sigma_1, \ldots \sigma_N) = \sum_{j=1}^{N} (v\sigma_j\sigma_{j+1} + \varepsilon\sigma_j) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ v\sigma_j\sigma_{j+1} + \frac{\varepsilon}{2}(\sigma_j + \sigma_{j+1}) \right\} \quad (\varepsilon, v > 0)$$

であるとする。このとき系の分配関数は

$$Z(\beta, N) = \sum_{\sigma_1=0}^{1} \cdots \sum_{\sigma_N=0}^{1} \prod_{j=1}^{N} M(\sigma_j, \sigma_{j+1})$$
$$M(\sigma_j, \sigma_{j+1}) = e^{-\beta\{v\sigma_j\sigma_{j+1} + \varepsilon(\sigma_j + \sigma_{j+1})/2\}}$$

のように 2 つの変数 σ_j, σ_{j+1} のみを含む量 $M(\sigma_j, \sigma_{j+1})$ を用いて表せるので，2×2 対称行列 M を用いて

$$Z(\beta, N) = \mathrm{tr}\{\mathsf{M}^N\}$$

と表せる。

以下では，分子間の強い相互作用によって，ある分子が $\sigma_j = 1$ の状態にあるときには隣り合う 2 つの分子は常に $\sigma_{j-1} = \sigma_{j+1} = 0$ となる，という拘束条件があるとする。

5. $v \to \infty$ の極限を取ることでこの拘束条件を入れ，行列 M を求めなさい。また，その二つの固有値を $\lambda_\pm$ とすると，

$$\mathrm{tr}\{\mathsf{M}^N\} = {\lambda_+}^N + {\lambda_-}^N$$

であることを用いて，分配関数を書き表しなさい。

6. 熱力学極限を取り，分子 1 個あたりの自由エネルギー

$$f(T) = -kT \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z(\beta, N)$$

を求めなさい。

7. 問 **5**. で得られた分配関数を利用して，上の拘束条件を満たす分子の配置の総数 $c(N)$ を $N \gg 1$ の場合について求めなさい。