

2025年4月入学
千葉大学大学院融合理工学府博士前期課程
一般選抜 学力検査問題
(先進理化学専攻・物理学コース)

専門科目 (2)

検査時間 120分

注意事項

1. 監督者から解答を始めるように合図があるまでは冊子を開かないこと。
2. 問題は全部で6 ページある。
3. 問題 I, II の両方に解答すること。
4. 問題 I, II でそれぞれ別の解答用紙を使用すること。1 枚の解答用紙に複数の問題を解答してはいけない。また、問題 I, II のそれぞれについて 1 枚以上の解答用紙を提出すること。
5. 全ての解答用紙に、問題番号と受験番号を記入すること（氏名を記入してはいけない）。
6. 別途配布する草稿用紙は回収しない。

I

A.

サイクロトロンは電荷を持つ粒子を加速する装置の一つであり，現代では医療などにも用いられている。サイクロトロンはデューと呼ばれる半円状の，断面がコの字型をもつ導体できた構造を2つ持ち，それらに交流電圧をかけることによって粒子を加速する。図1のサイクロトロンでは中心の陽子源から陽子が供給され，最初は図中で右向きの電場により加速され右のデューに入る。デューの中では電位が一樣であり，磁場がデューに垂直で上向き（ z 軸方向）に一樣な場合は等速円運動を行う。この陽子が右のデューを出るころには左右のデューの電位差が反転しており，陽子は左のデューに向かって加速される。これを繰り返すうちに陽子は必要なエネルギーを得るまで加速される。この問題ではサイクロトロンの中心を原点に持つ円筒座標系 (r, ϕ, z) を考え，左右のデュー間の距離は十分小さいとする。また，陽子の運動による電磁波の放射や相対論的効果は考えず，サイクロトロンは真空中にあるものとする。

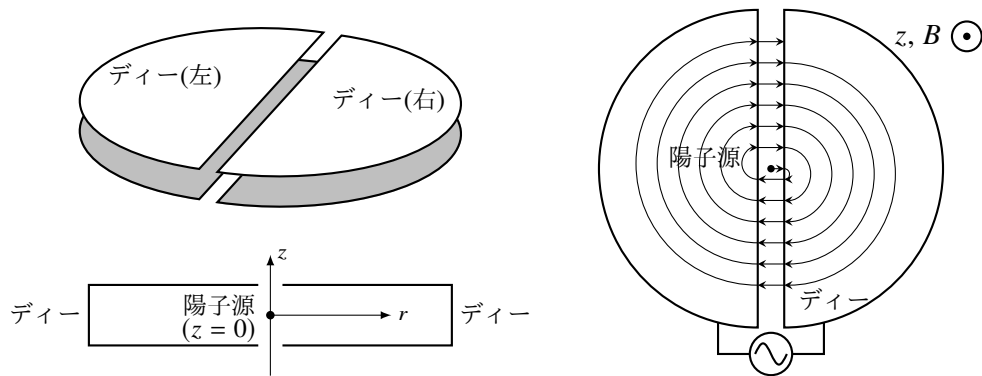


図1 サイクロトロンの模式図

1. 陽子がデューの端面に対して垂直に入射したとして，このデューを出るまでの時間 T を求めよ。これには円運動の半径 r ，速さ v ，陽子の電荷 q ，陽子の質量 m ， z 方向に加えられた磁場の磁束密度の大きさ B_z のうち v 以外の必要な記号を用いて答えよ。また， T の r 依存性について記述せよ。
2. 問1の円運動の角速度を ω とし，これを求めよ。
3. 運動エネルギー 8.5 MeV の陽子の速さを SI 単位系で有効数字1桁で求めよ。また，半径 1.0 m のサイクロトロンで陽子を運動エネルギー 8.5 MeV まで加速できたとすると，磁束密度の大きさ B_z の下限値を有効数字2桁で求めよ。必要であれば表1の定数を用いよ。

B.

実際の陽子源からは様々な初期速度を持った陽子が供給される。このため，一樣な磁場をもつサイクロトロンでは陽子の軌道が理想的な軌道よりそれてしまい，十分に加速される前にデューの内壁に吸収されてしまうなどの問題がある。その対策として，磁場を工夫することにより陽子

表 1 物理定数

名称	記号	概数値
光速度	c	$3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$
プランク定数	h	$6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}$
電気素量	e	$1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
真空の透磁率	μ_0	$1.3 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$
真空の誘電率	ϵ_0	$8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
陽子の質量	m_p	$1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
電子の質量	m_e	$9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

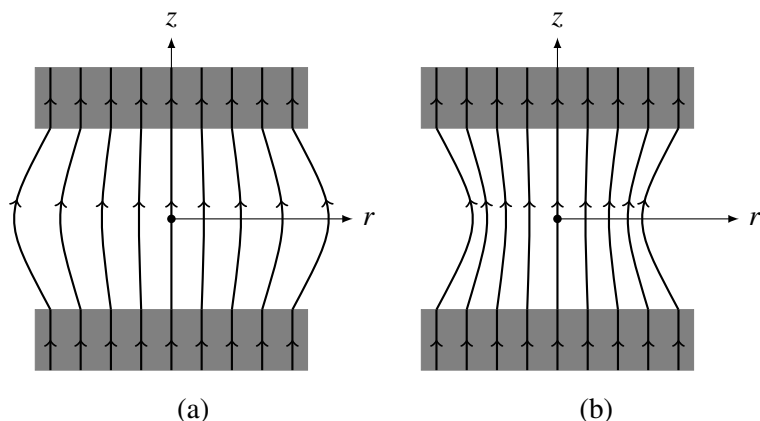


図 2 磁束の分布を表した模式図

の軌道を理想的な軌道付近に留めることを考える。このときの指標として μ を

$$\mu = \frac{r}{B_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

とおくと、 B_z は r^μ に比例するように変化する。この μ が取るべき範囲を求めよう。

以下の問題では速さ v で等速運動をする陽子について考える。ただし、ここでは B_z, B_r 成分の r, z の依存性だけを考え、 $B_\phi = \frac{\partial B_z}{\partial \phi} = \frac{\partial B_r}{\partial \phi} = 0$ とする。また、 μ はサイクロトロン内で一定であり、陽子の運動によって作られる磁場は十分に小さいものとする。必要ならば円筒座標系でのベクトルの回転は以下であることを使ってよい。

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z$$

4. $\mu < 0$ と $\mu > 0$ の場合の磁場の形状を表すものとして適切な図をそれぞれ図 2 の (a), (b) より選び、その理由を記述せよ。
5. まず、 z 方向の安定性について考える。磁場中を運動する陽子の z 方向の運動方程式を記せ。ただし、 B_r の z に関する一次までのマクローリン展開をすることにより m, q, v, z と B_r の偏微分を用いて表せ。ここで $z = 0$ の面で $B_r = 0$ とする。
6. 前問に引き続いて z 方向の運動方程式を ω, μ, z を用いて表せ。ただし、 ω は問 2 で求めたものと同じとする。

7. 上で求めた運動方程式から陽子が $z = 0$ 付近にとどまるための μ の条件と理由を記述せよ。
8. 次に磁場中での動径方向の軌道の安定を考える。ローレンツ力と遠心力が釣り合う理想的な軌道半径 R , そこからのずれ x を用いて $r = R + x$ とおく。動径方向の運動方程式を立て, $|x| \ll R$ と近似することにより x に対する運動方程式を求めよ。ただし, 近似の際には 1 次項までを考慮し, 解答には m, ω, μ を必要に応じて用いよ。
9. 上で求めた式において動径方向での軌道を安定化する μ の値の範囲を求めよ。

II

以下の問題 **A**, **B** において必要なら $\alpha > 0$ として

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

を用いてよい。

また, $f(x)$, $g(x)$ を状態ベクトル $|f\rangle$, $|g\rangle$ に対する x 表示の波動関数として

$$\langle f|O|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)O(x)g(x)dx$$

と表わす。ただし O は演算子, $O(x)$ は O に対する x 表示の演算子である。

A.

1 次元の量子力学的調和振動子を考える。ここで粒子の質量, 角振動数, デイラック定数 ($\hbar$) は簡単のため 1 として, この系のハミルトニアンを

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2$$

とする。

この系の基底状態の波動関数とエネルギーを変分法を用いて求めよう。 A を正の変分パラメーターとして変分関数を

$$f_A(x) = e^{-\frac{1}{2}Ax^2} \quad (A > 0)$$

ととる。このとき変分法では, エネルギーの期待値

$$E(A) = \frac{\langle f_A|H|f_A\rangle}{\langle f_A|f_A\rangle}$$

を最小にする A の値 A_0 を求め, $E(A_0)$ と $f_{A_0}(x)$ を変分法で得られた基底状態のエネルギーと波動関数とする。

1. $\langle f_A|f_A\rangle$ を求めなさい。
2. $\langle f_A|H|f_A\rangle$ を求めなさい。
3. $A > 0$ に注意して $E(A)$ を最小にする A の値 A_0 を求めなさい。また, $E(A_0)$ を求めなさい。

前問で求めた波動関数 $f_{A_0}(x)$ について調べよう。演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$$

とする。

4. $\hat{a}f_{A_0}(x)$ を計算しなさい。

上で定義した $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を用いてハミルトニアンは

$$H = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}$$

と書ける。 $\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}$ が互いにエルミート共役で $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ の期待値は決して負にならないことから、このハミルトニアンの基底状態のエネルギーは $\frac{1}{2}$ よりも小さくはならず、もし、 $f(x)$ が $\hat{a}f(x) = 0$ を満たせば、 $f(x)$ がこのハミルトニアンの基底状態の固有関数で、基底状態のエネルギーは $\frac{1}{2}$ となることがわかる。

次に励起状態について考えよう。規格化された基底状態の波動関数 $u_0(x)$ とすると、励起状態の規格化された波動関数 $u_n(x)$ は一般に、

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n!}} \left(\hat{a}^\dagger \right)^n u_0(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。

5. $u_1(x)$, $u_2(x)$ を求めなさい。また、 $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ の概形をグラフに描きなさい。なお概形については、波動関数のゼロ点の個数や偶関数か奇関数か、などに注意して書かれていれば十分であり、極値などを正確に求める必要はない。

次にこの系の基底状態についてポテンシャルの非調和項の効果を調べよう。ハミルトニアンは λ を実数として

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \lambda x$$

とし、 β を実数の変分パラメーターとして変分関数を

$$\phi_\beta(x) = u_0(x) + \beta u_1(x)$$

ととる。この変分関数についてエネルギーの期待値

$$E(\beta) = \frac{\langle \phi_\beta | H | \phi_\beta \rangle}{\langle \phi_\beta | \phi_\beta \rangle}$$

を最小にする β の値 β_0 を求め、基底状態のエネルギー $E(\beta_0)$ を計算しよう。

6. $\langle \phi_\beta | \phi_\beta \rangle$ を求めなさい。また, $\langle \phi_\beta | H | \phi_\beta \rangle$ を求めなさい。

7. ここでは $E(\beta)$ を β について 2 次の項まで展開してから $E(\beta)$ を最小にする β を探すことにする。このとき, 展開した $E(\beta)$ を最小にする β の値 β_0 および, $E(\beta_0)$ を求めなさい。

このように $E(\beta_0)$ を求めると, $\lambda \rightarrow 0$ で $\phi_\beta(x) \rightarrow u_0(x)$ となる解に対して, 変分法の近似の範囲内での基底状態のエネルギーを λ で展開した 2 次の項まで正しく求めたことになっている。

B.

ハミルトニアンが

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda x^4 \quad (\lambda > 0)$$

で与えられる, 1次元調和振動子に摂動項 λx^4 が加わった系を考える。ここで, $\hbar$ はディラック定数, m は振動子の粒子の質量, ω は角振動数の次元を持つ正の定数である。

8. まず $\lambda = 0$ の場合を考える。このとき基底状態の規格化された波動関数を書きなさい。必要なら A の結果を用いてよい。

9. 次に $\lambda \neq 0$ の場合に, この系の基底状態のエネルギーを λ についての 1 次までの摂動展開で求めなさい。ただし, 摂動展開のエネルギーの 1 次の表式は導かずに用いてよい。