周期駆動非平衡量子系の理論の入門

佐藤正寛　茨城大学大学院　理工学研究科

概 要

本講義ノートでは、周期的 AC 外場で駆動される量子系におけるフロケ・エンジニアリングの理論の基礎を解説する。フロケ・エンジニアリングとは、注目する系にその系の時間スケールより高周波数の AC 外場を印加して、系の静的物性を操作・制御する方法を指す。これを理論的に解析する際、フロケの定理、高周波数展開法、時間依存摂動論、時間依存シュレディンガー方程式の数値解析、グリーン関数法、量子マスター方程式などが活用される。本講義では、特にフロケ・エンジニアリングの基本的な考え方を理解する上で有意義なフロケの定理と高周波数展開法について詳しく解説する。また固体結晶におけるフロケ・エンジニアリングに焦点を当て、代表的 AC 外場であるレーザーや電磁波の情報、および、金属や磁性体における実現可能性が高いエンジニアリングの具体例を示す。動的局在、フロケ・トポロジカル絶縁体、金属における逆ファラデー効果、スピン系の磁化やジャロシンスキー守谷相互作用の制御法などが取り上げる具体例である。最後に、固体では避けがたい散逸の効果を取り込んだフロケ・エンジニアリングの理論の最近の進展についても触れたい。

1　はじめに

近年、物性物理学の広範な領域で非平衡系の研究が精力的に行われている。固体系を非平衡化させるのに有効な外場であるレーザーや電磁波に関わる光物性科学・技術 [1–3] が発展し続けていること、非平衡状態が主戦場となるエレクトロニクス・スピントロニクス [4–7] ・ナノスケールの物理学などが近年飛躍的に発展していること、非平衡古典および量子系に関する活発な理論研究が継続していること [8]、既存の非平衡系の考え方や方法が物性分野に浸透してきたこと、平衡系 (またはその近傍) の理解が既に深化していること、などが非平衡系研究の活性化に大きく影響していると思われる。「非平衡」とはその名の通り平衡以外全てを指しており、それ故非平衡系全てを記述する万能な理論は存在しないが、それでも物性実験で実現する非平衡系を (部分的にでも) うまく記述できる理論的方法が日々探索されている。中でも成功を収めている代表的戦略として、非平衡グリーン関数の方法 [7,9–12]、フロケの定理と高周波数展開法 [1,13–21]、量子マスター方程式の方法 [22–25] などが挙げられる。非平衡グリーン関数の方法を詳しく解説している文献は幾つか存在する。一方、フロケの定理の考え方が固体電子系に浸透してきたのは比較的最近であり (フロケの定理自体は 19 世紀の成果である)、また固体やメソ・ナノスケールの物質系を意識して量子マスター方程式を解説している和文献も少ないように思われる。

このような背景から、本講義ではフロケの定理、高周波数展開法、量子マスター方程式の解説を試みる。ところで、筆者は非平衡系研究の新参者である。従って、非平衡系を記述する理論的方法の数理的側面については非平衡系や統計力学基礎論に長年携わっている研究者からレクチャーを受けた方が圧倒的に有意義である。筆者が非平衡系のレクチャーをする意義を高める為に、自らの特徴を分析してみれば、(i) 実際の物質や観測可能量を意識した物性研究経験と (ii) 非平衡系に有効な解析方法を現実的模型に応用してきた (または発展させてきた) 経験という部分であろう。そこで、本講義では、特に固体系を意識しながら、フロケ・エンジニアリングと量子マスター方程式の入門的解説を試みる。さらに、簡単で現実的な具体例を挙げて、これらの方法の有効性や限界も説明したい。

非平衡状態に関わる未解明問題はあらゆる科学分野に存在し、近年発展してきた非平衡系の理論を武器としてこれまで困難であった非平衡系の問題 (の一部) に攻め込むことが可能となりつつある。また、上述のように非平衡系全般に有効な万能理論は存在せず、それ故、非平衡物性の決定版的テキストもない。これらの事実は、非平衡物理学分野において攻め込むことができる魅力的な開拓地が広がっており、若手研究者が参入する価値が非常

に高いことを示唆している。本講義が少しでも学生や若手研究者に非平衡量子系の研究の興味を与えるキッカケになれば幸いである。

2 フロケ・エンジニアリング

フロケ・エンジニアリングとは、時間方向に周期的な外場を物質に印加し、外場の周期より長い時間スケールに着目して、物質の静的物性を外場により制御する方法を指す。この意味は以下の解説から理解していただきたい。この方法の理論的基盤が「フロケの定理」であることから、この名が付けられている。周期外場を用いた典型的な物理現象は共鳴現象であるが、このフロケ・エンジニアリングは周期外場の非共鳴な効果に基づいており、それ故、高強度の外場が必須となる。近年、レーザー科学・技術 [1–3] が著しく発展しており、広い周波数帯で高強度レーザーを利用することが可能になりつつある。従って、レーザーを利用したフロケ・エンジニアリングの研究が精力的に行われている。特に、以下で解説するように、フロケの定理の応用が非常に容易であることから、多くの理論的提案が (安易に) 為されている。熱平衡系では実現が難しい状態を実現する、あるいは、高速に物理量を制御する方法を実現するフロケ・エンジニアリングが有意義な成果と言えよう。

本講義では、注目する系のダイナミクスを完全に量子力学的に扱い、外場 (レーザーなど) を c 数として扱う (系が外場へ与える影響は無視する立場)。そして、本章では、系は熱浴と結合しておらず孤立している (孤立量子系) と仮定する (但し、外場が印加されている為、孤立量子系という名称の使用は誤解を招くかもしれない)。このような設定は、フロケ・エンジニアリングに関わる多くの理論研究のそれと共通である。系が孤立していることは非現実的ではあるが、この理想化により、フロケ・エンジニアリングの理解が深められることを本章から読み取ってもらいたい。現実的な系では不可避な熱浴との結合の効果は 3 章で議論する。

以下では、フロケの定理、高周波数展開、フロケ・エンジニアリングの注意点、レーザー強度、について順に解説する。

2.1 フロケの定理

フロケの定理とは、もともと線形微分方程式についての数学的な定理であるが、物理分野では主に周期外場中の量子系のシュレディンガー方程式を対象とした定理として定着しているようである。以下、適宜 $\hbar = 1$ の単位系を考える。レーザーに代表される周期外場中の量子系を考えよう。外場の周期を $T = 2\pi/\omega$ とすると (ω は外場の角周波数)、この量子系のハミルトニアンは $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$ という周期性を持つ。フロケの定理は、このような時間方向に周期的な系のシュレディンガー方程式 $i\partial_t\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$ の解が

$$\Psi(t) = \exp(-i\epsilon t)\Phi(t) \tag{1}$$

と書けて、 $\Phi(t)$ が周期関数 $\Phi(t+T) = \Phi(t)$ であることを主張する。ここで実数 ϵ はフロケの擬エネルギーと呼ばれる。すなわち、フロケの定理は、周期駆動系のシュレディンガー方程式の解が平面波 $e^{-i\epsilon t}$(真空中の解) と周期関数の積で与えられることを述べている。これは、固体結晶中で良く知られたブロッホの定理 [26, 27] の時間版と呼べる結果である。

このフロケの定理を証明しておこう [28]。まず一周期 T だけの時間並進演算子

$$\hat{U}(t+T,t) \equiv \mathcal{T}\Big[\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+T} d\tau \hat{H}(\tau)\Big)\Big] \tag{2}$$

を定義する。$\mathcal{T}$ は時間順序積である。ハミルトニアンの周期性から $\hat{U}(t+T,t) = \hat{U}(t+(n+1)T, t+nT)$ が成り立つ ($n \in Z$)。この時間並進演算子をシュレディンガー方程式 $i\partial_t\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$ に左から作用すれば $i\partial_t\Psi(t+T) = \hat{H}(t+T)\Psi(t+T) = \hat{H}(t)\Psi(t+T)$ を得る。つまり、$\Psi(t)$ と $\Psi(t+T)$ は同じシュレディンガー方

程式を満たす。よって解 $\Psi(t)$ に比例する解 $\Psi(t+T)=c_T\Psi(t)$ が必ず存在する。このとき c_T は $\hat{U}(t+T,t)$ の固有値と言える。続いて、やはりハミルトニアンの周期性から、ハミルトニアンと時間並進演算子 $\hat{U}(t+T,t)$ は可換である：$[\hat{U}(t+T,t),\hat{H}(t)]=0$。従って、$\hat{H}(t)$ と $\hat{U}(t+T,t)$ は同時対角化可能である。さらに、

$$\begin{aligned}\hat{U}(t+(m+n)T,t+mT)\hat{U}(t+mT,t)&=\hat{U}(t+mT,t)\hat{U}(t+(m+n)T,t+mT)\\&=\hat{U}(t+T,t)^{m+n}\\&=\hat{U}(t+(m+n)T,t)\end{aligned}\tag{3}$$

が成り立つ。この関係は $\hat{U}(t+T,t)$ の固有値が $c_{nT}c_{mT}=c_{mT}c_{nT}=c_{(m+n)T}=c_T^{m+n}$ を満たすことを示している。これは c_T が指数関数であること、すなわち、$c_T=e^{-i\epsilon T}$ を意味する。以上より、シュレディンガー方程式の解 $\Psi(t)$ は

$$\Psi(t+T)=e^{-i\epsilon T}\Psi(t)\tag{4}$$

の関係を満たす。ここで $\Phi(t)=e^{i\epsilon t}\Psi(t)$ を導入すれば、$\Phi(t)$ が周期関数であることが分かる：

$$\Phi(t+T)=e^{i\epsilon(t+T)}\Psi(t+T)=e^{i\epsilon(t+T)}e^{-i\epsilon T}\Psi(t)=e^{i\epsilon t}\Psi(t)=\Phi(t)\tag{5}$$

これで式 (1) が示された。(証明完了)

さて、上のフロケの定理の結果だけでは、周期駆動された量子系についてそれほど理解が深められたとは言えない。固体電子系のブロッホの定理から電子のバンド構造が得られるように、フロケの定理の結果を利用してもう少しシュレディンガー方程式と戯れて、周期駆動系の理解を深めよう。周期性 $\hat{H}(t+T)=\hat{H}(t)$ と $\Phi(t+T)=\Phi(t)$ は、$\hat{H}(t)$ と $\Phi(t)$ が時間方向に離散的フーリエ変換できることを意味する。そこでフーリエ変換

$$\hat{H}(t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-im\omega t}\hat{H}_m,\qquad \Phi(t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{-im\omega t}\Phi_m,\tag{6}$$

と逆フーリエ変換

$$\hat{H}_m=T^{-1}\int_0^T dt\ e^{im\omega t}\hat{H}(t),\qquad \Phi_m=T^{-1}\int_0^T dt\ e^{im\omega t}\Phi(t),\tag{7}$$

を導入する。これらと式 (1) をシュレディンガー方程式に代入し整理すれば、フーリエ成分 $\{\hat{H}_m\}$ と $\{\Phi_m\}$ が満たす一般化固有値方程式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\hat{H}_{m+n}-m\omega\delta_{m,n})\Phi_n=\epsilon\Phi_m\tag{8}$$

を得る。ハミルトニアン $\{\hat{H}_m\}$ が与えられていれば、これは関数列 $\{\Phi_m\}$ と固有値 ϵ(フロケの擬エネルギー) を決定する固有値方程式と解釈出来る。実数 ϵ は、時間発展演算子 $\hat{U}(t+T,t)$ の固有値 $e^{-i\epsilon T}$ の中で導入されているので、結晶運動量と同じように、「ブリルアン」ゾーン $-\frac{\pi}{T}=-\frac{\hbar\omega}{2}\le\epsilon<\frac{\hbar\omega}{2}=\frac{\pi}{T}$ の中でのみ有意である。この周期性から、ϵ は「擬」エネルギーと呼ばれる訳である。この方程式は時刻 t をあらわに含まない「静的」な方程式であることを強調しておく。

この固有値問題の物理的意味をより深く理解する為に、方程式を行列型に書き換えよう。方程式 (8) は

$$\begin{pmatrix}\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&&&\\ \cdots&\hat{H}_0-2\hbar\omega&\hat{H}_1&\hat{H}_2&\hat{H}_3&\cdots&\\ \cdots&\hat{H}_{-1}&\hat{H}_0-\hbar\omega&\hat{H}_1&\hat{H}_2&\hat{H}_3&\cdots\\ \cdots&\hat{H}_{-2}&\hat{H}_{-1}&\hat{H}_0&\hat{H}_1&\hat{H}_2&\cdots\\ \cdots&\hat{H}_{-3}&\hat{H}_{-2}&\hat{H}_{-1}&\hat{H}_0+\hbar\omega&\hat{H}_1&\cdots\\ &\cdots&\hat{H}_{-3}&\hat{H}_{-2}&\hat{H}_{-1}&\hat{H}_0+2\hbar\omega&\cdots\\ &&&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ \Phi_2\\ \Phi_1\\ \Phi_0\\ \Phi_{-1}\\ \Phi_{-2}\\ \vdots\end{pmatrix}=\epsilon\begin{pmatrix}\vdots\\ \Phi_2\\ \Phi_1\\ \Phi_0\\ \Phi_{-1}\\ \Phi_{-2}\\ \vdots\end{pmatrix}\tag{9}$$

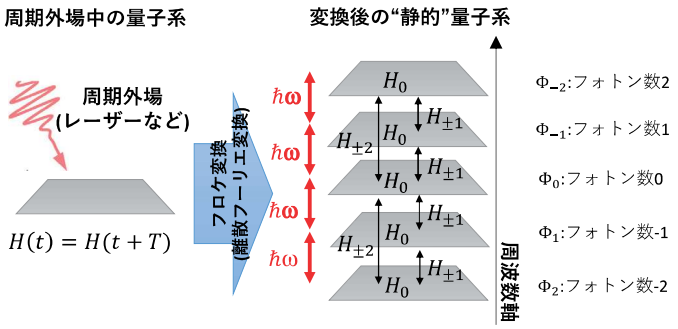

図 1: 周期駆動量子系をフロケの定理と離散フーリエ変換を介してフロケ擬エネルギー ϵ の固有値問題へ変換する際の変換前後のイメージ図。

と表現できる。ここであえて $\hbar$ を復活させてある。固有値問題の各行 Φ_n は、元の時間依存する量子系と同じ大きさのヒルベルト空間に住むベクトルである。この行列表示のイメージを図 1 に与えた。この図に示したように、周期外場をエネルギー $\hbar\omega$ の 光子 (フォトン) から成るレーザーとみなすと行列表示の固有値問題のイメージがつかみやすい。固有値方程式 (9) の行列の対角成分に注目すれば、1 行昇る (降りる) 毎にエネルギーが $\hbar\omega$ ずつ減少 (増加) していることが分かる。従って $\cdots, \Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \cdots$ は各々フォトン数 $\cdots, 2, 1, 0, -1, -2, \cdots$ 個の部分空間の波動関数と解釈することができる。フォトン数 n の部分空間の対角成分ハミルトニアンは $\hat{H}_0 + n\hbar\omega$ で与えられる。$\hat{H}_0 = T^{-1}\int_0^T dt\hat{H}(t)$ は時間平均化されたハミルトニアンである。一方、行列の非対角要素に注目すれば、フォトン数が n 個だけ離れた 2 つの部分空間はハミルトニアンのフーリエ成分 $\hat{H}_{\pm n}$ で結合している。以上の描像を表しているのが図 1 である。

フロケの定理により、周期外場中の非平衡系の問題はあらわな時刻 t 依存性が消えた固有値問題 (8) または (9) に置換出来た訳である。静的な固有値問題は平衡統計力学の多彩な方法を用いて解析可能であり、この意味で問題が簡単化されたと言える。しかし、その代償として、フォトン数 n という新しい指標が導入され、これを新しい空間方向の添え字と考えると、対象とする問題の空間次元が 1 次元分増加してしまったことになる。

2.2 高周波数 (フロケ・マグナス) 展開とフロケ・エンジニアリング

固有値問題 (8)(9) から、元のヒルベルト空間における静的有効ハミルトニアン (フロケ・ハミルトニアンと呼ぶ) を得る近似法として、高周波数展開法が知られている。複数種の展開方法 [18](総じてフロケ・マグナス展開と呼んでしまうこともある) が存在するが、ここでは行列表示 (9) と図 1 を用いて直観的に理解し易い縮退摂動論 [29] に基づいた方法を紹介する。

摂動計算を実行する際ブラケット記号が便利なので、Φ_n や $\Psi(t)$ を $|\Phi_n\rangle$ や $|\Psi(t)\rangle$ と表現することにしよう。フォトンエネルギー $\hbar\omega$ が系の他のエネルギースケール (すなわち $\{\hat{H}_n\}$ の全ての固有値) より十分大きい場合を考えよう。このとき、フォトン数が 1 つ異なる隣接部分空間の「距離」$\hbar\omega$ は非常に大きく、部分空間をつなぐフーリエ成分 $\hat{H}_{\pm n}$ はフォトン数を固定した空間に対する摂動と考えてよい。以下では、フォトン数 n の部分空間 (元のヒルベルト空間) の有効ハミルトニアンを導く。

無摂動ハミルトニアンは対角部分の定数 $n\hbar\omega$ である。このフォトン・エネルギーは有効ハミルトニアンを考える上では無視しよう。実際、擬エネルギー ϵ の周期性から、各フォトン数確定空間において、定数 $n\hbar\omega$ を除いて同型の有効ハミルトニアンを得る。ここで、元のヒルベルト空間の次元を d とし、各フォトン数確定空間の正規直交基底 $\{|\Phi_n\rangle_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, d)$ を用意しよう。このとき、フォトン数 n の部分空間への射影演算子は $\hat{P}_{-n} = \sum_{j=1}^{d} |\Phi_{-n}\rangle_{jj}\langle\Phi_{-n}|$ と書ける。フォトン数確定空間はすべて元のヒルベルト空間と同じ広さなので、実質的に任意の整数 m と n に対して、$\hat{P}_{-n} = \hat{P}_{-m}$ といえる。より正確には、フォトン数 n 空間の基底 $|\Phi_{-n}\rangle_j$ を、

フォトン数を示すケット $|n\rangle$ を用いて、$|\Phi\rangle_j|n\rangle$ と表現しておくと良いだろう。$|\Phi\rangle_j$ はフォトン数が異なる全ての部分空間で共通の基底である。同様にして、固有値方程式 (9) において、例えば、フォトン数 n 空間の対角成分 $\hat{H}_0$ を $\hat{H}_0|n\rangle\langle n|$ とみなし、フォトン数 n と $n+m$ 空間を結ぶ非対角行列要素 $\hat{H}_m(m\neq 0)$ を $\hat{H}_m|n+m\rangle\langle n|$ とみなせば、摂動計算がやりやすいだろう。

1 次摂動ハミルトニアンは、射影演算子で摂動ハミルトニアンを挟めばよいので、$\hat{H}^{(1)}\equiv\hat{P}_{-n}\hat{H}_0\hat{P}_{-n}=\hat{H}_0$ である。射影演算子がフォトン数確定空間 (元のヒルベルト空間) では単位行列とみなせることを利用している。

2 次摂動項は、摂動論に従えば

$$\hat{H}^{(2)}=\hat{P}_{-n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_j\frac{\hat{H}_{+m}|\Phi_{-(n+m)}\rangle_{jj}\langle\Phi_{-(n+m)}|\hat{H}_{-m}}{n\hbar\omega-(n+m)\hbar\omega}+\sum_j\frac{\hat{H}_{-m}|\Phi_{-(n-m)}\rangle_{jj}\langle\Phi_{-(n-m)}|\hat{H}_{+m}}{n\hbar\omega-(n-m)\hbar\omega}\right)\hat{P}_{-n} \tag{10}$$

である。ここで中間状態で登場する $\hat{P}_{-(n\pm m)}$ は、やはり、$\hat{H}_{\pm m}$ が元のヒルベルト空間に作用する演算子と考えれば、(フォトンの空間 $|n\pm m\rangle\langle n\pm m|$ を除いて) 単位行列とみなしてよい。従って、

$$\hat{H}^{(2)}=\hat{P}_{-n}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{\hat{H}_{+m}\hat{H}_{-m}}{m\hbar\omega}+\frac{\hat{H}_{-m}\hat{H}_{+m}}{m\hbar\omega}\right)\hat{P}_{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[\hat{H}_{+m},\ \hat{H}_{-m}]}{m\hbar\omega} \tag{11}$$

を得る。すなわち、2 次摂動はフォトン数が m 個ずれた空間をつなぐ非対角要素 $\hat{H}_{\pm m}$ の交換子で与えられる。この 2 次までの結果をまとめれば、有効ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm eff}=\hat{H}_0-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[\hat{H}_{+m},\ \hat{H}_{-m}]}{m\hbar\omega}+\mathcal{O}((\hbar\omega)^{-2}) \tag{12}$$

である。この摂動論の手続きを続ければ、原理的により高次の項も求められる。第 1 項 $\hat{H}_0$ は時間平均化されたハミルトニアンであり、しばしば周期外場印加前のハミルトニアンと一致する。第 2 項以降の $1/\omega$ の冪乗項は周期外場の存在ではじめて発生する。これら冪乗項は、外場の種類・波形・周波数などを調整することで有効ハミルトニアンの形を制御できることを示している。すなわち、通常、系 (物質) を 1 つ選択すればハミルトニアンは固定されてしまうが、高周波数の外場を巧く印加すれば、外場印加中だけハミルトニアン (系の性質) を変化させられる訳である。これがフロケ・エンジニアリングの基本的なアイディアである。

この節を終える前に、上記摂動論とは別の展開方法についても少しだけ触れておく。固有値問題 (9) の固有値が擬エネルギー ϵ であり、これが時間発展演算子 $\hat{U}(t+T,t)$ の固有値 $e^{-i\epsilon T}$ として導入されたことを思い出せば、静的なフロケ・ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm eff}$ は

$$\exp(-i\hat{H}_{\rm eff}T)=\mathcal{T}\Big[\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_0+T}d\tau\hat{H}(\tau)\Big)\Big]=\hat{U}(t_0+T,t_0) \tag{13}$$

で定義されていると考えてもよい。この右辺の時間発展演算子の指数の中身を $1/\omega$ 展開する方法を構築すれば $\hat{H}_{\rm eff}$ を得ることができる。時間発展演算子が以下のように 3 項に分割できる [16–18] と仮定してやると、有効ハミルトニアンを巧く計算できることが知られている：

$$\hat{U}(t_2,t_1)=\exp(-i\hat{G}(t_2))\exp\big[-i\hat{\mathcal{H}}\ (t_2-t_1)\big]\exp(i\hat{G}(t_1)) \tag{14}$$

ここで $\hat{G}(t)$ は周期関数 ($\hat{G}(t)=\hat{G}(t+T)$) であり、指数 $\exp(\pm i\hat{G}(t))$ は周期 T 以下の短時間の (高周波数の) 揺らぎを表す。$\hat{G}(t)$ は kick 演算子、または、マイクロモーション演算子と呼ばれる。$\hat{\mathcal{H}}$ が周期 T に比べて緩やかな運動を担う、時間に依らない演算子である。式 (14) の右辺を巧く高周波数展開することで、$\hat{\mathcal{H}}$ は式 (12) の有効ハミルトニアンに等しいことが示される。一般に、式 (14) の形で定義されるハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ は初期時刻 t_1 に依存してしまうが、kick 演算子 $\hat{G}(t)$ が $\int_0^T dt\hat{G}(t)=0$ を満たすように決めてやれば、$\hat{\mathcal{H}}$ は上記摂動論と同じように時間に依存しない形で計算される。

詳細は省くが、式 (14) の高周波数展開の結果、$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\mathcal{H}}^{(k)}$ と $\hat{G}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}^{(k)}(t)$ が得られる。添え字 (k) を持つ項は $1/\omega^k$ に比例する。ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}$ について、ω のゼロ次項 $\hat{\mathcal{H}}^{(0)}$ は $\hat{H}_0$ であり、$1/\omega$ の項 $\hat{\mathcal{H}}^{(1)}$ は式 (11) の $\hat{H}^{(2)}$ となる。$1/\omega^2$ の項は以下で与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}}^{(2)} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq 0)}}^{\infty} \frac{[[\hat{H}_{-m}, \hat{H}_0], \hat{H}_m]}{2m^2(\hbar\omega)^2} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq 0)}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0,m)}}^{\infty} \frac{[[\hat{H}_{-m}, \hat{H}_{m-n}], \hat{H}_n]}{3mn(\hbar\omega)^2} \tag{15}$$

一方、$\hat{G}(t)$ の低次項は以下のように計算される。

$$i\hat{G}^{(1)}(t) = -\sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq 0)}}^{\infty} \frac{\hat{H}_m}{m\hbar\omega} e^{-im\omega t} \tag{16}$$

$$i\hat{G}^{(2)}(t) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq 0)}}^{\infty} \frac{[\hat{H}_m, \hat{H}_0]}{m^2(\hbar\omega)^2} e^{-im\omega t} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ (m\neq 0)}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0,m)}}^{\infty} \frac{[\hat{H}_n, \hat{H}_{m-n}]}{2mn(\hbar\omega)^2} e^{-im\omega t} \tag{17}$$

異なる高周波数展開法とその間の関係は、文献 [18] で詳細に説明されている。

2.3 フロケ・ハミルトニアンの意味

前節では、高周波数展開からフロケ・ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm eff}$(式 (12) や (15)) が得られることを解説した。我々は、この $\hat{H}_{\rm eff}$ から周期駆動系のどのような性質を理解できるのだろうか？ 統計力学や固体物理学を学習した理論研究者は、高周波数の周期外場を印加することで $\hat{H}_{\rm eff}$ をハミルトニアンとする熱平衡状態や基底状態が実現するのでは？ と考えたくなるだろう。しかし、そのようなナイーブな期待は正しくない。以下では、主に多体系に着目して、フロケ・ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm eff}$ や kick 演算子 $\hat{G}(t)$ の物理的意味に関する重要事項を箇条書きで説明する。

[A] $\hat{H}_{\rm eff}$ と $\hat{G}(t)$ の展開公式を実践的に多体系に応用するとき、有限次数で高周波数展開を打ち切る必要がある。周期外場を除いて多体系の相互作用が局所的なとき、高周波数展開は (場の理論の摂動展開と同じように) 一般に漸近展開的振舞いを示すことが知られている。局所相互作用する系の $1/\omega^q$ 項で打ち切ったフロケ・ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_q \equiv \sum_{k=0}^{q} \hat{\mathcal{H}}^{(k)}$ について、以下のことが示されている [30, 31]。(i)AC 外場と系の結合も含めた周期駆動系の典型的な局所エネルギーを $\mathcal{A}$ としよう。高周波数展開が良い近似になるのは $\hbar\omega \gg \mathcal{A}$ のときであり、この展開の次数 q には最適値 $q_0 \propto \hbar\omega/\mathcal{A}$ が存在する。(ii)AC 外場を印加してから時刻 $\tau_1 \sim \exp[\mathcal{O}(\hbar\omega/\mathcal{A})]\hbar/\mathcal{A}$ までの間は、$\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}$ をほぼ保存量とみなして良い。(iii)τ_1 より十分短い時刻 τ_2 までの間は、時間発展演算子は

$$\hat{U}(t_2, t_1) \approx \exp\big[-i\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}\,(t_2 - t_1)\big] \tag{18}$$

で近似できる。すなわち、(i)-(iii) は、外場を印加している時間が短時間であれば、その間のハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}$ で近似してよい、ということを主張している。さらに、(i)-(iii) の定理は、漸近展開になってしまうフロケ・ハミルトニアンを持つ系では、式 (13) から厳密なフロケ・ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm eff}$ を仮に (数値計算などで) 求められたとしても、それは周期駆動系の短時間ダイナミクスを記述する良いハミルトニアンではない、ということも示唆している。定理 (i)-(iii) のより詳細な内容は、原論文 [30, 31] や [1] の中の森氏の邦文記事を見ると良い。

[B] 可積分系のような特殊な系を除いた、局所相互作用をもつ孤立量子多体系を考えよう。系の保存量であるエネルギーがある微小なシェル内にあるとき、そのシェル内のエネルギー固有状態はほぼ全て同じエネルギーの熱平衡状態と同じ性質を満たすと考えられている。すなわち、シェル内の任意のエネルギー固有状態につ

いての物理量の期待値は、同じエネルギーを持つ熱平衡状態の期待値とほぼ等しい。この性質は固有状態熱化仮説 (Eigenstate thermalization hypothesis: ETH) と呼ばれている [32–35]。この仮定が成り立つ正常な系では、任意の状態から十分時間発展し、異なるエネルギーを持つ固有状態間のコヒーレンス (干渉効果) が無視できるようになれば、系の物理量の期待値は熱平衡状態のそれで良く近似できる。この結果を周期外場中の孤立量子系に適用してみよう。[A] で述べたように、周期駆動系のダイナミクスは、短時間 τ_2 の間は、時間依存しないハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_q$ で時間発展する。この時間内で、系が十分時間発展し $\hat{\mathcal{H}}_q$ のエネルギー固有状態間の干渉効果が無視できるようになれば、系の物理量の期待値が $\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}$ をハミルトニアンとする熱平衡状態のそれで近似できることになる。但し、τ_2 より $\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}$ が熱平衡化する時間が短くなる保証はない。

[C] フロケ・ハミルトニアンの形 (式 (12) や (15)) を見れば、粗い見積もりで、高周波数展開の無次元展開パラメータは $A/(\hbar\omega)$ である。ここで A は系と外場の典型的な結合エネルギーの大きさである。短時間ダイナミクスを記述する上で、フロケ・ハミルトニアンの低次の展開項までの近似の精度を高めるには (つまり τ_2 を長くするには) 「十分周波数が高い」または「十分外場 (外場と系の結合) が弱い」という条件が必要になる。一方で、系を周期外場で高速制御するというフロケ・エンジニアリングの立場に寄り添えば、低次の項 $\hat{H}^{(0)(1)(2)}$ の効果が小さいということは、外場によってエンジニアリングされる物理量の変化が極めて小さいことを意味する。$A/(\hbar\omega)$ が十分小さいことは、低次項で打ち切ったフロケ・ハミルトニアン (12) や (15) による予言の定量性向上に繋がるが、式 (12) や (15) は「効果的フロケ・エンジニアリングの実現させるには、$A/(\hbar\omega)$ がある程度大きな値の実験設定を提案・実現せよ」ということを示唆している。系のエネルギースケールに比べてあまりにも高周波数の外場では印加していないのと変わらない、ということである。筆者の経験から考えると、系のエネルギースケールの数倍のフォトン・エネルギーを持つ外場を用意できれば、物理量をほどよく制御 (フロケ・エンジニアリング) できる可能性が高い。系を固体物質、外場をレーザーに絞った場合、レーザーのフォトン・エネルギー $\hbar\omega$ に比べて結合エネルギー A を大きくすることは一般に容易ではない (詳しくは 2.5 節で述べる)。A を大きくする必要があるという事実は、2 章の初めで述べた「フロケ・エンジニアリングは非共鳴現象であり、高強度の外場が必須」というコメントと合致する。理論研究に着目すれば「A の値を安易に変化させている理論研究は実験の実現可能性をほぼ考察していない」と言える。

[D] [A][B][C] では、周期駆動孤立系の短時間ダイナミクスについての重要な情報を述べた。では、周期外場中の孤立量子系の長時間後の状態はどのように記述されるだろうか？ 具体的な周期外場中の孤立量子模型に対する数値計算によって、長時間外場印加後の物理量の期待値は温度無限大のそれに漸近することが示されている [36, 37]。これは実際の実験を連想すれば容易に想像できることである。例えば、外場としてレーザーを考えると、レーザーを長時間印加した系が加熱してしまうことは至極自然な結論である。レーザーを使って物質を溶解・整形するレーザー加工という分野も存在する。机上の可積分系やランダム系では加熱が抑えられるが、固体・液体などの実際の物質を考えたときは理論模型で取り込んでいない自由度が存在し、それらの自由度を介して必ず加熱されてしまうだろう。

[E] 近似された時間発展演算子 $\exp(-i\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}\ (t_2-t_1))$ を、式 (14) を参考にして、

$$\hat{U}(t_2,t_1) \approx \exp(-i\hat{G}_p(t_2))\exp\big[-i\hat{\mathcal{H}}_{q<q_0}\ (t_2-t_1)\big]\exp(i\hat{G}_p(t_1)) \tag{19}$$

で置換すれば、周期 T より短時間の高速ダイナミクスも含めて系の時間発展をより正確に記述できる。ここで $\hat{G}_p(t)$ は $\hat{G}(t)$ の展開公式を $1/\omega^p$ 項までで打ち切った演算子 $\hat{G}_p(t)=\sum_{k=1}^{p}\hat{G}^{(k)}(t)$ である。高速ダイナミクスも記述できる点は式 (14) の高周波数展開法の大きな利点と言える。

以上のことから、一般の局所相互作用する量子系において、高周波数展開で有限次数で打ち切ったフロケ・ハミルトニアン $\mathcal{H}_{q<q_0}$ は、周期駆動系の短時間のダイナミクスを記述する時間発展演算子とみなして良い。

2.4 時間依存ユニタリ変換：回転座標系に乗る

ここまで周期外場中の孤立量子系をフロケ理論に基づいて解析する方法を述べてきた。しかし、周期駆動系を解析する際、フロケ理論が常に最良の方法とは限らない。一般に、孤立量子系には (多体系では微妙な問題もあるが) ユニタリ変換を施す自由度がある。周期駆動系のシュレディンガー方程式 $i\partial_t\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$ に左から時間依存性を持つユニタリ演算子 $\hat{\mathcal{U}}(t)$ を作用すると、同型の方程式 $i\partial_t\Psi_{\mathcal{U}}(t) = \hat{H}_{\mathcal{U}}(t)\Psi_{\mathcal{U}}(t)$ を得る。ここで、新しい波動関数は $\Psi_{\mathcal{U}}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t)\Psi(t)$ で定義され、また新しいハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\mathcal{U}}(t) = \hat{\mathcal{U}}(t)\hat{H}(t)\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t) - i\hat{\mathcal{U}}(t)\left(\partial_t\hat{\mathcal{U}}^\dagger(t)\right) \tag{20}$$

で与えられる。この新しいシュレディンガー方程式が元の表示では理解しにくい周期駆動系の特徴を炙り出してくれる場合がある。具体的には、適当なユニタリ変換 $\hat{\mathcal{U}}(t)$ を施すことで、(i) 外場と系の結合定数が弱いハミルトニアン $\hat{H}_{\mathcal{U}}(t)$ にマップされフロケ・マグナス展開の収束性が向上する、または (ii) 周期外場が完全に静的外場にマップされ、時間依存性がないハミルトニアン $\hat{H}_{\mathcal{U}}$ を得る、という状況が起こり得る。(i) の例は「周期電場 (電位) と電荷が結合した電子模型に適当なユニタリ変換 (ゲージ変換) を施すことで、電場の効果がパイエルス位相の中のベクトルポテンシャルに化ける」である。これは例えば文献 [1] の岡氏や森氏の記事で解説されている。(ii) の例として「円偏光レーザー (または電磁波) 中の量子磁性体模型に対して円偏光と同じ周波数で回転する座標系に移るユニタリ変換を施すと、有効的な静磁場を持つ静的模型に写像される」が挙げられる。この回転座標系に乗る技法は磁気共鳴分野において古くから知られている [38] が、最近筆者らはフロケ理論・レーザーのチャーピング・ランダウ=ゼナー遷移と関連させて回転座標系への写像の有効性や物理的意味を考察している [19, 39]。

ここでは、1 つの電子スピンに角振動数 ω の円偏光レーザーを照射している単純な系を使って (ii) の例を解説する。以下のハミルトニアンで記述される周期駆動系を考えよう。

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm spin}(t) &= -B_z\hat{S}^z - \boldsymbol{A}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \\ &= -B_z\hat{S}^z - \frac{A}{2}\left(\hat{S}^+e^{-i\omega t} + \hat{S}^-e^{i\omega t}\right)\end{aligned} \tag{21}$$

ここで、$\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}^x, \hat{S}^y, \hat{S}^z) = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z)$ が電子スピン演算子 (S=1/2) であり (スピン演算子を無次元化している)、2 行目で昇降演算子 $\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$ を導入した。第 1 項は $\hat{S}^z$ 方向の静磁場によるゼーマン相互作用であり、$B_z = g\mu_{\rm B}H_z$ はゼーマン項の結合定数である (g は g 因子、$\mu_{\rm B}$ はボーア磁子、H_z は静磁場)。第 2 項が $\hat{S}^z$ 方向に伝搬する円偏光レーザーによる AC ゼーマン相互作用である。AC ゼーマン項の周期外場 $\boldsymbol{A}(t)$ は

$$\boldsymbol{A}(t) = A(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) \tag{22}$$

で与えられる。結合定数は $A = g\mu_{\rm B}H_{\rm ac}$ で、$H_{\rm ac}$ がレーザーの AC 磁束密度の大きさである。固体中の電子スピンに関わる励起のエネルギースケールは通常ギガヘルツ (GHz=10^9Hz) からテラヘルツ (THz=10^{12}Hz) 周辺に分布している為、模型 (21) においてフロケ・エンジニアリングを考察するとき、THz 域の円偏光レーザーが最適である (詳しくは 2.5.2 節で解説する)。

さて、模型 (21) にユニタリ変換を施して、より簡単な系にマップすることを考えよう。円偏光により S^x-S^y 面内で回転する磁場がスピンに印加されている。従って、円偏光と同じ回転速度で回る座標系に乗ってあげれば、円偏光磁場が静磁場に見えるはずである。そこでユニタリ演算子として、$\hat{S}^z$ 軸周りを角振動数 ω で回転させる演算子

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \exp(i\hat{S}^z\omega t) \tag{23}$$

を考えよう。これを用いれば、ユニタリ変換後の世界のハミルトニアンは期待通り時間依存性がない形になる：

$$\hat{H}_{\mathcal{U}} = -B_z\hat{S}^z - A\hat{S}^x - \hbar\omega\hat{S}^z = -\boldsymbol{B}_{\mathcal{U}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \tag{24}$$

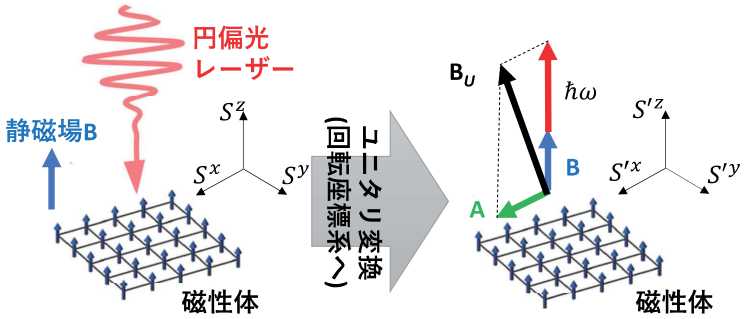

図 2: 円偏光中の磁性体模型とそれを角振動数 ω で回転する座標系にマップされた模型。

ここで新しいゼーマン相互作用の結合定数ベクトルは $\boldsymbol{B}_{\mathcal{U}} = (A, 0, B_z + \hbar\omega)$ である。すなわち、回転座標系に乗り移ることで、円偏光レーザーの磁場は $\hat{S}^x$ 方向の静磁場 A に化け、さらに $\hat{S}^z$ 方向に新たに $\hbar\omega$ の磁場が追加された静的模型に写像された訳である。この静的模型への変換は、単一スピンの系に限らず、円偏光レーザーのゼーマン項以外のスピンハミルトニアンが S^z 軸周りの U(1) 回転対称性を持っていれば常に実現可能である。変換後の系は静磁場中のスピン模型であり、多スピン系であったとしても、統計力学や物性物理学の多彩な戦略で解析することが可能である。例えば、1THz のレーザーのフォトン・エネルギー $\hbar\omega$ は 36[T] 程の高磁場に相当する (2.5.2 節を見よ)。通常の小規模実験室で実現できる静磁場は高々 10[T] 程度であり、数 10[T] の磁場は高磁場施設を使わねば地球上では実現できない。従って、模型 (23) は、レーザーの周波数を THz 帯またはそれ以上に設定すれば、超高磁場中のスピン模型が実現することを期待させる。すなわち、円偏光レーザーを使えば、どんな磁性体の飽和磁化状態でも実現できることを推測させるが、フロケ理論の節でも議論したように、ハミルトニアンの基底状態が常に実現できる訳ではない。ハミルトニアンはあくまで時間発展演算子である。円偏光由来の磁場 $\hbar\omega$ によって系の磁化を猛烈に変化させることは一般に困難であるが、少なくとも模型 (23) は円偏光により磁化を制御できることを強く示唆している。可視光周辺領域の円偏光レーザーを金属磁性体に加えると、スピン軌道相互作用とレーザーの AC 電場を介して、光誘起磁化が発生することが知られている。これは磁気光学分野で逆ファラデー効果 [66] と呼ばれる現象である。模型 (23) は THz 領域の円偏光レーザーの AC「磁場」を利用した逆ファラデー効果が可能であることを示している。実際、著者たちは、円偏光レーザーを利用して広いクラスの量子磁性体の磁化を大きく制御する為の工夫を提案し、また THz 磁場による磁化の制御を理論的に示している [19, 39]。

2.5 実験の舞台：固体・冷却原子系・レーザー

本節では、フロケ・エンジニアリングの舞台となる実験設定や実験技術について重要事項を述べる。

2.5.1 冷却原子系から物質系へ

これまで、理論家が (安易に？) 提案した孤立量子多体系におけるフロケ・エンジニアリングの幾つかは冷却原子系 [41] で実現している。前世紀末から発展してきた量子エレクトロニクスの技術のおかげで、現在、1 秒オーダーの寿命で、まさに孤立量子多体系と呼んでよい冷却原子気体を実現することができる。この系では、空間次元・気体をトラップする格子の形・粒子密度・相互作用の種類や強さ・内部自由度・周期外場などを比較的自由に制御することが可能であり、フロケ・エンジニアリングに関わる理論的提案を実現する理想的舞台 [16, 17] を提供してくれる。冷却原子系は、フロケ・エンジニアリングに限らず、孤立量子系における新しい量子現象を実現する上で非常にありがたい舞台と言える。しかし、元々のフロケ・エンジニアリングの考え方・実験設定・研究開拓の余地について考察すれば、筆者は、固体・液体・気体などの有り触れた物質系におけるフロケ・エンジニアリ

ング [1] を発展させていくことが今後ますます重要であると考える。こう考える根拠として以下のようなことが挙げられる。

[i] 冷却原子系は確かに理想的な孤立量子系であるが、その実現には複数本のレーザービームが使用される。そのような系においてフロケ・エンジニアリングを実現するには、さらに追加のレーザービームが必要である。理想的な舞台を用意する為に相当な技術的・エネルギー的なコストがかかっている訳である。実際、冷却原子系を実現できるのは世界的に少数の実験グループに限られる。一方で、通常の物質系でフロケ・エンジニアリングを実現する最も単純な設定は「ほぼ寿命無限大と考えられる対象物質を用意し、そこに適切な 1 種類の外場を印加する」である。候補となる物質は無数にあり、このような単純かつ再利用可能な設定でフロケ・エンジニアリングが実現すれば、応用への道も拓けると同時に、基礎科学的にもフロケ・エンジニアリングに関係する新しく広大な研究舞台が産み出される。

[ii] 定性的なレベルで孤立量子系におけるフロケ・エンジニアリングを予言するならば、フロケ・ハミルトニアンの低次項ーすなわち交換関係ーを計算すればよい。有難いことに、そのような予言が冷却原子系において実現されてきた。このお手軽さ故にフロケ・エンジニアリングの理論研究が流行したともいえる。しかし、それ故、フロケ・ハミルトニアンの計算で解決するような単純な問題はやり尽くされた感がある。したがって、フロケ・エンジニアリングの研究を質的に発展させるには、より解析が難しい通常の物質に焦点を当てざるを得ないという側面がある。

[iii] 例えば、冷却原子系におけるあるフロケ・エンジニアリングの方法を利用して、外場印加により A 相から B 相への相転移が実現したとしよう。しかし、既に述べたように、そもそも冷却原子系には、系の多くの性質を自由に制御できる性質がある。したがって、B 相を実現することが目的であれば、フロケ・エンジニアリングに頼らず、初めから B 相を実現する冷却原子系を用意することを目指す方が近道である場合が多いだろう。

今後も冷却原子系はフロケ・エンジニアリングの理想的な舞台として研究されてゆくと考えられる。しかし、上記の背景から、有り触れた物質系におけるフロケ・エンジニアリングの中に解決すべき挑戦的な課題が多数残されていると思われる。

2.5.2 レーザー強度

固体系や冷却原子系でフロケ・エンジニアリングを実現する為の最も有効な周期外場は間違いなくレーザーやコヒーレントな高強度電磁波である。理論研究では、レーザーや電磁波についての情報を把握しておかなければ、現実性のないフロケ・エンジニアリング法を導いてしまう。ここでは、特に固体中の典型的な励起に着目し、それらと匹敵するフォトン・エネルギーをもつ電磁波やそれらに関わる科学・技術について述べる。

図 3 に広い周波数 (またはエネルギー) 帯における固体中の典型的励起 (準粒子) を示した。固体中の磁気 (電子スピン) 励起はギガヘルツ (GHz=10^9Hz) からテラヘルツ (THz=10^{12}Hz) 帯 (1GHz~10THz 程度) に分布している。また核スピンのダイナミクスはより低速でメガヘルツ (MHz=10^6Hz) 帯にある。固体中の格子振動 (フォノン) や分子の振動モードは THz から赤外領域 (1 ~ 100THz 程度) にあり、可視光域周辺 (0.1 ~ 10PHz 程度) にはバンド・モット絶縁体の電荷励起が分布している。MHz から GHz の低周波数領域の電磁波や準粒子ダイナミクスは、エレクトロニクスやスピントロニクス [4–7] で頻繁に利用される。この領域ではメーザーはあるものの、高強度コヒーレント電磁波を生成することは難しく、通常電磁誘導や電気回路などを利用して電磁波を生成する。一方、赤外・可視光・紫外領域の電磁波や高エネルギー電荷励起は光物性科学やレーザー科学 [1–3] の研究舞台となる。この領域では高強度のレーザービームを生成することが可能である。近年、この低・高周波数帯のちょうど中央に位置する THz 帯 (0.1-10THz 程度の領域) [1, 19] のレーザー科学・技術が発展しており、高周波数領域のいわゆるレーザーに比べればその強度はまだ弱いが、THz レーザーの高強度化や制御法が日進月歩で進展している [42–45]。

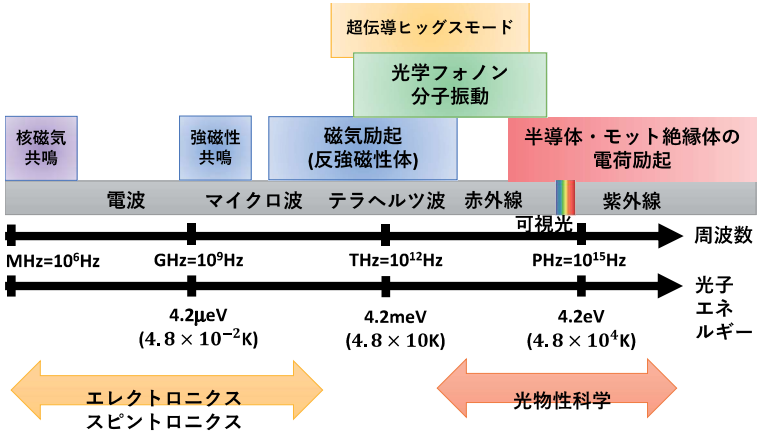

図 3: レーザーの周波数 (フォトン・エネルギー) と対応する固体中 (物質中) の典型的励起 [1,21]。

レーザーと言うと、長時間にわたり sin 曲線に従う電磁場の振動が継続する連続波 (continuous wave: CW) を想像する者が多いだろうが、CW を「圧縮」させ高強度化されたレーザーパルスも精力的に研究されている。数周期、1 周期、半周期のパルスなどがしばしば利用されている。特にもともと高強度化が難しい THz 帯ではパルスの技術により高強度化が実現される。レーザーの高強度化は、線形応答を超えて非線形光学効果 (フロケ・エンジニアリングを含む) を実現する上で大変重要な技術である。固体中で非線形光学効果を起こす上で 1 つの指標となるレーザー強度は 1[MV/cm] という AC 電場振幅である。同レーザーの磁束密度の振幅は 0.3[T] 程度である。1[MV/cm]=10^{-2}[V/Å] であり、また水素原子のエネルギー準位が $-13.6/n^2$[eV]$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを思い出そう。従って、1[MV/cm] とは、原子の大きさ、もしくは固体内の原子間隔程度の距離で、電子に原子内準位間隔の 1/10〜1/100 程度の電位差をもたらす電場である。また、典型的な磁性絶縁体の交換相互作用は温度 (磁場) 換算で 10-100[K](10-100[T]) 程度であることから、1[MV/cm] の電場振幅を持つ電磁波の磁場振幅 0.3[T] は典型的交換相互作用 (磁気励起エネルギー) の 1/10〜1/100 程度といえる。一方、固体中の電流輸送や磁気共鳴などの線形応答を観測する際に使われる電磁場の強度は 1[MV/cm] より何桁も弱い。赤外や可視光領域では、1-10[MV/cm] の CW を生成することが可能だが、THz 領域では 1-10[MV/cm] のレーザーパルスを生成できる光物性研究室は世界でもごく少数に限られるのが現状である。また、10[MV/cm] 以上 (ものによっては 1[MV/cm]) の高強度レーザーを照射すると、加熱・燃焼してしまう固体物質も多いことも認識しておくべきである。さらに、各物質は真空とは異なる誘電率と透磁率を持つため、一般に真空中のレーザーの電磁場強度より物質中のそれらは弱められることも注意すべきである。特に電荷と電場の結合は強い為、物質中のレーザーの電場強度は真空中のそれに比べて大きく減少しやすい。表 1 と 2 に典型的なレーザー強度と関係する物理量の表を挙げている [21,46]。

2.3 節までのフロケ理論の舞台として理想的なのは、CW を印加された物質である。一方、上記のように、フロケ・エンジニアリングを含めた非線形光学効果を実現する上では、高強度レーザーパルスを使うことが有利である。レーザーパルス照射時の非平衡現象にフロケ理論を適用可能か否かについては、注目する系の特性を踏まえて慎重に考察しなければならない。一般にレーザーパルス系に対してフロケ理論は定量的予言力を持たないだろうが、少なくとも解析のヒントを与えてくれるだろう。また、フロケ・エンジニアリングに拘らなければ、レーザーパルスで生じる非平衡現象の科学には魅力的な研究開拓地が広がっていると言ってよい。

3 フロケ・エンジニアリングの具体例

本章では、2 章で解説した高周波数展開とフロケ・ハミルトニアンに基づいて、簡単かつ代表的なフロケ・エンジニアリングの理論的提案について簡潔に解説する。取り上げるのは、動的局在、フロケ・トポロジカル絶縁体、

電磁波	THz	GHz
周波数, $\omega/(2\pi)$	10^{12} Hz	10^{9} Hz
フォトン・エネルギー, $\hbar\omega$	4.1 meV	4.1 μeV
温度, $T=\hbar\omega/k_{\rm B}$	48 K	48 mK
磁束密度, $B_0=\hbar\omega/g\mu_{\rm B}$	36 T	36 mT
電場, $E_0=cB_0$	107 MV/cm	107 kV/cm
電場 (その 2), $E_1=\hbar\omega/(ea_{\rm B})$	0.8 MV/cm	0.8 kV/cm

表 1: GHz と THz 帯の電磁波のフォトン・エネルギーと対応する温度や電磁場強度 [21, 46]。$k_{\rm B}$ はボルツマン定数、$g=2$ は真空中の電子の g 因子、$\mu_{\rm B}$ はボーア磁子、e は素電荷、$a_{\rm B}$ はボーア半径。

電場	E_0 =1 MV/cm
磁束密度, B_0	0.33 T
エネルギーフラックス, I	1.3×10^{9} W/cm^2=1.3 GW/cm^2

表 2: 1[MV/cm] の電場をもつ電磁場の磁場強度とエネルギー流強度 [21, 46]。

逆ファラデー効果、磁性絶縁体のフロケ・エンジニアリングの 4 つの話題である。

3.1 動的局在

電子間相互作用が無視できる金属や半導体中の電子のダイナミクスを記述する tight-binding 模型を考えよう。その電子系にレーザーを照射した周期駆動系を考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H}=-t\sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle}\left(e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}\hat{f}^\dagger_{\boldsymbol{r}}\hat{f}_{\boldsymbol{r}'}+e^{-i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}\hat{f}^\dagger_{\boldsymbol{r}'}\hat{f}_{\boldsymbol{r}}\right) \tag{25}$$

とする。$\hat{f}^\dagger_{\boldsymbol{r}}$ と $\hat{f}_{\boldsymbol{r}}$ はサイト $\boldsymbol{r}$ にいる電子の生成消滅演算子であり、t は隣接サイト $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の間のホッピング (トランスファー積分) である。ここでは電子スピンに関わらない現象を考察する為、スピン自由度は無視した。位相因子 $e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}$ はいわゆるパイエルス位相であり、レーザーの AC 電場はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を用いて

$$\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)=-\frac{e}{\hbar c}\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}'}d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \tag{26}$$

で表現される。c は光速、$e(>0)$ は素電荷である。スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)=0$ のゲージの下では、AC 電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ の関係で与えられる。従って、例えば、直線偏光電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_0(\cos(\omega t),0,0)$ に対応するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(t)=-\frac{c}{\omega}E_0(\sin(\omega t),0,0)$ で与えられる。このときパイエルス位相は $\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)=-\frac{eE_0}{\hbar\omega}\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\sin(\omega t)$ である。$\boldsymbol{e}_x$ は x 方向の単位ベクトルである。2.4 節で少し触れたように、電場の効果は電位差としてハミルトニアンに取り込むこともできるが、以下で議論する動的局在を議論するには、このパイエルス位相による処方が効果的である。固体電子系のエネルギースケール (バンド幅) は通常 1[eV] オーダーであるから、フロケ・エンジニアリングを実行するには、1[eV] かそれ以上のフォトン・エネルギーを持つレーザー (可視光周辺) が最適と言えよう (図 3 を見よ)。金属系のフェルミ面近傍の電子のみのエンジニアリングに焦点を当てれば、赤外レーザーも有効と言える。

さて、この系に高周波数展開を適用し、最低次の有効ハミルトニアン $\hat{H}_0$ を評価すると

$$\hat{H}_0=-t\sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle}J_0(\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'})(\hat{f}^\dagger_{\boldsymbol{r}}\hat{f}_{\boldsymbol{r}'}+\hat{f}^\dagger_{\boldsymbol{r}'}\hat{f}_{\boldsymbol{r}}) \tag{27}$$

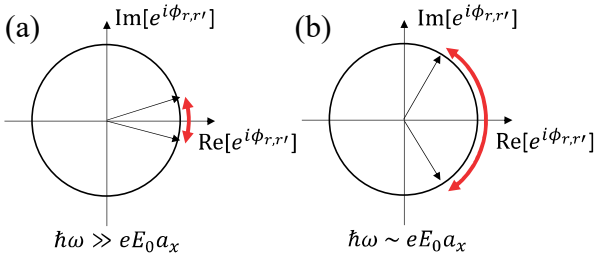

図 4: 動的局在におけるパイエルス位相の振動の様子。

を得る。ここで $J_0(z) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{iz\sin(\omega t)} = J_0(-z)$ は第 1 種ベッセル関数であり、新しいパラメータ $\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'} = -\frac{eE_0}{\hbar\omega}\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を導入した。これは、レーザーによりホッピング t が $tJ_0(\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'})$ に繰り込まれたことを意味する。関数 $J_0(\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'})$ は、$J_0(0) = 1$ から $\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}$ の増加とともに単調減少し、$\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'} \approx 2.4$ を超えると負になる。$\boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ は高々結晶中の格子間隔 (数 $\mathring{A}$) 程度であるから、$\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}$ はレーザー強度 E_0 に比例して増加する。従って、有効ハミルトニアン (27) は、レーザーによりホッピング (バンド幅) が減少することを示唆している。このようなレーザーにより電子が局在に向かう現象を動的局在と呼んでいる [47,48]。

ほぼ完全に電子を局在させるには $\alpha_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'} \sim 2.4$ に到達させる必要がある (正確に言えば、そのような高強度 AC 電場下では、フロケ・ハミルトニアンのより高次項も考慮する必要がある)。その実現には、例えば、フォトン・エネルギー $\hbar\omega \sim 4.1$[eV] のレーザー (周波数 $\omega/(2\pi) = 1$[PHz]) を印加する場合、格子間隔 $a_x = \boldsymbol{e}_x\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を $10\mathring{A}$ と仮定して、$eE_0a_x/(4.1[\mathrm{eV}]) \sim 2.4$ を満たす電場が必要である。これは 80[MV/cm] という巨大電場を持つレーザーに相当し、ほぼすべての固体結晶は焼失してしまう。従って、完全な、または、著しい動的局在現象を固体電子系で実現することは困難と言える。有機導体結晶において、レーザーによる 10 %程度のホッピングの低下に伴った光誘起絶縁体転移が実験・理論研究により検証されている [2,49]。一方、冷却原子系では、明瞭な動的局在が観測されている [50]。

最後に、レーザーによりなぜ電子が局在するのか、について定性的解説を与える。レーザーによるパイエルス位相 $\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)$ は時間とともに振動しており、当然 AC 電場振幅 E_0 の増加とともに $e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}$ の振動も激しくなる。これを図 4 に示した。電場 E_0 が弱いときは (パネル (a))、$\mathrm{Re}[e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}]$ の時間平均はほぼ 1 であり、平均的なホッピング $t\langle\mathrm{Re}[e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}]\rangle$ の値はレーザー無しの場合とほぼ変わらない。一方で E_0 が増大すると (パネル (b))、$\mathrm{Re}[e^{i\phi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}(t)}]$ は激しく振動しその平均値は低下する。従ってホッピングの大きさも激減する訳である。このような解説は文献 [2] でも与えられている。

3.2 フロケ・トポロジカル絶縁体

続いて、3.1 節と同じように tight-binding 模型におけるフロケ・エンジニアリングで時間平均ハミルトニアン $\hat{H}_0$ の次の展開項 ($1/\omega$ の項) が本質的な役割を果たす例を示す。2 次元 massless ディラック電子系に円偏光レーザーを照射して、ディラック分散に mass gap を誘導し、カイラルエッジ状態を持つトポロジカル絶縁体 (正確にはチャーン絶縁体) を生成する、という例である。この円偏光が誘導するトポロジカル状態をフロケ・トポロジカル絶縁体 [51–53] と呼ぶ。トポロジカル量子相 [57–60] が多くの理論研究者を魅了している時期であったこともあり、この予言を与えたパイオニア理論研究 [51,52] が物性物理学分野に広くフロケ・エンジニアリングの概念を普及するキッカケとなった。その後の実験研究により、固体電子系 [54,55] と冷却原子系 [56] において、フロケ・トポロジカル絶縁体の可能性を示唆する物理量の観測が為されている。

フロケ・トポロジカル絶縁体を解説する為に、図 5 のようなハニカム格子上の電子系 (グラフェン) に円偏光レーザーを印加した周期駆動系を考えよう。ハニカム格子の 2 つの副格子を A と B で表すことにする。レーザー照射

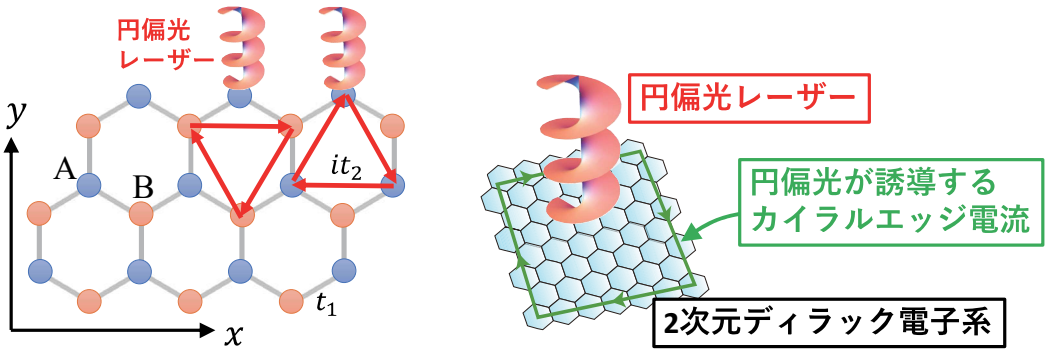

図 5: (左パネル) 円偏光照射下のハニカム格子電子系 (グラフェンの模型)。円偏光により虚数因子 it_2 を持つ次近接ホッピングが生じる (詳しくは 3.2 節を見よ)。(右パネル) フロケ・トポロジカル絶縁体のイメージ図。グラフェンに円偏光レーザーを照射することで、カイラル・エッジ電流が流れる状態 (フロケ・トポロジカル絶縁体) が実現すると期待される。

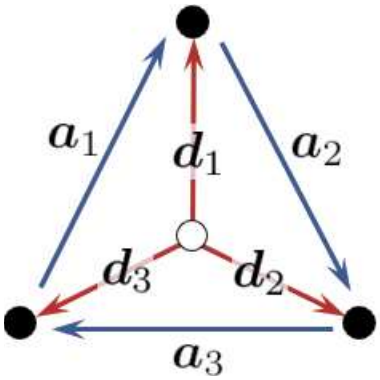

図 6: ハニカム格子における最近接サイト間ベクトル $\boldsymbol{d}_i$ と次近接サイト間ベクトル $\boldsymbol{a}_i$。

前のハミルトニアンを

$$\hat{H} = -t_1 \sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \rangle} c^\dagger_{\boldsymbol{r}} c_{\boldsymbol{r}'} + \mu_{\rm s} \left[\sum_{\boldsymbol{r}\in A} a^\dagger_{\boldsymbol{r}} a_{\boldsymbol{r}} - \sum_{\boldsymbol{r}\in B} b^\dagger_{\boldsymbol{r}} b_{\boldsymbol{r}} \right] \tag{28}$$

とする。$c_{\boldsymbol{r}}$ がサイト $\boldsymbol{r}$ の電子の消滅演算子である。A と B 副格子の電子を表すために、$a_{\boldsymbol{r}} = c_{\boldsymbol{r}\in A}$ と $b_{\boldsymbol{r}} = c_{\boldsymbol{r}\in B}$ を定義した。ハミルトニアンの第 1 項は最近接ボンド間のホッピングを表す。パラメータ $\mu_{\rm s}$ に比例する第 2 項はスタガード (交代) ポテンシャルである。本節のフロケ・エンジニアリングでは電子スピンは本質的ではないので、スピン自由度は無視している。$\mu_{\rm s} = 0$ のとき、電子のエネルギーバンドは波数空間の K と K' 点周りにディラック電子型の massless 分散を持つ [61]。以後の議論のために、最近接サイト間または次近接サイト間を結ぶベクトルである $\boldsymbol{d}_j$ と $\boldsymbol{a}_j (j = 1, 2, 3)$ を図 6 中のように定義しておく。最近接サイト間隔 a_0 を 1 と規格化すると、$\boldsymbol{d}_j$ と $\boldsymbol{a}_j$ の表式は次のようになる。

$$\boldsymbol{d}_1 = (0, 1, 0)\,,\ \ \boldsymbol{d}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right),\ \ \boldsymbol{d}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right). \tag{29}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right),\ \ \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right),\ \ \boldsymbol{a}_3 = \left(-\sqrt{3}, 0, 0 \right). \tag{30}$$

ここで $|\boldsymbol{d}_i| = 1$ である。

前節と同じように、この系に円偏光レーザーを照射するとき、AC 電場と電子の結合をパイエルス位相の形でハミルトニアンの中に導入する。円偏光に対応するベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{A}(t) = A\,(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \tag{31}$$

で定義する。対応する AC 電場を $\boldsymbol{E}(t) = E_0(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)$ とすれば、$A = -\frac{c}{\omega}E_0$ である。この $\boldsymbol{A}(t)$ を用いて、円偏光レーザーの効果を加えたハミルトニアンのホッピング (運動エネルギー) 項は

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{K}}(t) &= -t_1 \sum_{\boldsymbol{r}\in A}\sum_{j=1,2,3} e^{-i\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{d}_j\cdot\boldsymbol{A}(t)}\, a^\dagger_{\boldsymbol{r}}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} \;+\; \mathrm{h.c.}\\ &= -t_1 \sum_{\boldsymbol{r},\,j} e^{-i\frac{e}{\hbar c}A\cos(\omega t-\beta_j)}\, a^\dagger_{\boldsymbol{r}}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} \;+\mathrm{h.c.}\end{aligned} \tag{32}$$

と表現される。ここで、h.c. はエルミート共役項を意味し、2 行目で $\sum_{\boldsymbol{r}\in A}\sum_{j=1,2,3} = \sum_{\boldsymbol{r},\,j}$ の略記を用いた。2 行目では、指数の中身の内積を $\boldsymbol{d}_j\cdot\boldsymbol{A}(t) = A\cos(\omega t-\beta_j)$ と表現している。β_j はベクトル $\boldsymbol{d}_j$ と x 軸との成す角度である。以後、煩雑さを避ける為 $-\frac{e}{\hbar c}A \to A$ と略記しよう。この時間依存ハミルトニアンから時間方向のフーリエ成分 $\hat{H}_n$ を計算する為に、ベッセル関数についての公式 $e^{ix\sin\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\phi}$ または $e^{ix\cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x)e^{in\phi}$ を用いて、式 (32) を以下のように書き換えよう。

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{K}}(t) &= -t_1 \sum_{\boldsymbol{r},\,j}\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n J_n(A)\, e^{in\omega t - in\beta_j}\, a^\dagger_{\boldsymbol{r}}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} \;+\mathrm{h.c.}\\ &= -t_1 \sum_{\boldsymbol{r},\,j}\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^{-n}\, e^{in\beta_j} J_n(A)\, \Big[\,(-1)^n\, a^\dagger_{\boldsymbol{r}}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} \;+\; b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j}\, a_{\boldsymbol{r}}\,\Big]\, e^{-in\omega t}.\end{aligned} \tag{33}$$

この表式から、フーリエ成分 $\hat{H}_n$ は、

$$\hat{H}_0 = -t_1 J_0(A) \sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle} c^\dagger_{\boldsymbol{r}} c_{\boldsymbol{r}'} + \mu_{\mathrm{s}}\left[\sum_{\boldsymbol{r}\in A} a^\dagger_{\boldsymbol{r}} a_{\boldsymbol{r}} - \sum_{\boldsymbol{r}\in B} b^\dagger_{\boldsymbol{r}} b_{\boldsymbol{r}}\right] \tag{34}$$

$$\hat{H}_{n\neq 0} = -t_1 i^{-n} J_n(A) \sum_{\boldsymbol{r},\,j} e^{in\beta_j}\left[(-1)^n a^\dagger_{\boldsymbol{r}} b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} + b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} a_{\boldsymbol{r}}\right] \tag{35}$$

これを利用すれば、フロケ・ハミルトニアンの $1/\omega$ 項は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\hat{H}_{-n},\hat{H}_n]}{n\omega} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_1^2 J_n(A)J_{-n}(A)}{n\omega}\\ &\quad\times\sum_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',j,j'} e^{-in(\beta_j-\beta'_j)}\left[\left((-1)^{-n} a^\dagger_{\boldsymbol{r}}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} + b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j}\, a_{\boldsymbol{r}}\right),\ \left((-1)^n\, a^\dagger_{\boldsymbol{r}'}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} + b^\dagger_{\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{d}_{j'}}\, a_{\boldsymbol{r}'}\right)\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_1^2 J_n^2(A)}{n\omega}\sum_{\boldsymbol{r},j,j'} e^{-in(\beta_j-\beta'_j)}\left[a^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_{j'}-\boldsymbol{d}_j} a_{\boldsymbol{r}} - b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_{j'}} b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} - a^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j-\boldsymbol{d}_{j'}} a_{\boldsymbol{r}} + b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_{j'}}\right]\\ &= -2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_1^2 J_n^2(A)}{n\omega}\sum_{\boldsymbol{r},j,j'}\sin\left((\beta_{j'}-\beta_j)\,n\right)\left[a^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j-\boldsymbol{d}_{j'}} a_{\boldsymbol{r}} - b^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j} b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_{j'}}\right]\end{aligned} \tag{36}$$

と計算される。ここで、左辺の分母において $\hbar\omega \to \omega$ と略記した。$\boldsymbol{d}_j - \boldsymbol{d}_{j'} = \pm\boldsymbol{a}_s (s = 1,2,3)$ のとき、$\beta_{j'} - \beta_j = \pm\frac{2\pi}{3}$ であることを利用すれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[H_{-n},H_n]}{n\omega} = -2i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_1^2 J_n^2(A)}{n\omega}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\sum_{\langle\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle\rangle}\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}\, c^\dagger_{\boldsymbol{r}} c_{\boldsymbol{r}'} \tag{37}$$

ここで $\sum_{\langle\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle\rangle}$ は同一副格子間の次近接ボンドについての和を表す。$\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} \equiv \pm 1$ の符号は、図 6 のような次近接ボンドに沿ったホッピング $\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}$ がつくる 3 角形の回転方向が時計回りのとき正、反時計回りのとき負をとるように定義している。以上より、フロケ・ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm eff} = -\,t_1^{\rm eff} \sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle} c_{\boldsymbol{r}}^\dagger c_{\boldsymbol{r}'} + i t_2^{\rm eff} \sum_{\langle\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle\rangle} \tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}\, c_{\boldsymbol{r}}^\dagger c_{\boldsymbol{r}'} + \mu_{\rm s} \sum_{\boldsymbol{r}} \left[\, a_{\boldsymbol{r}}^\dagger a_{\boldsymbol{r}} \,-\, b_{\boldsymbol{r}}^\dagger b_{\boldsymbol{r}} \,\right] \tag{38}$$

となり、最近接および次近接ホッピングのパラメータは

$$t_1^{\rm eff} = t_1 J_0(A), \qquad t_2^{\rm eff} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_1^2 J_n^2(A)}{n\omega} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \tag{39}$$

と評価される。円偏光レーザーにより、虚数因子を持つ次近接ホッピング項が生成することが重要なポイントである。この項は、ハニカム格子のプラケットに有効的な磁束が貫いている効果だと解釈することができる。すなわち、円偏光レーザーにより、時間反転対称性が破れた静的系が生じた訳である。レーザー角周波数 ω を $-\omega$ にすることで左右円偏光に乗り移ることができる。実際、この符号変化で $t_2^{\rm eff}$ の符号が変化することが分かる。一方、$\omega \to -\omega$ は直線偏光に本質的変化はもたらさない。それ故、グラフェンに直線偏光を印加しても、高周波数展開の $1/\omega$ 項から時間反転対称性を破るホッピング項は発生しない。以下で説明するように、この対称性を変化させるホッピングにより、フロケ・ハミルトニアンの基底状態はディラック電子状態からカイラル・エッジ電流が流れるチャーン絶縁体相 [57] に変化する (図 5 の右パネルを見よ)。このフロケ・ハミルトニアン (38) はハニカム格子上のハルデン模型 [62](の一部) と等価であることが知られている。それ故、以下で、ハルデン模型について簡単に解説する。

ハルデン模型

ハニカム格子上のハルデン模型 [62] のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\rm H} &= -t_1 \sum_{\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle} c_{\boldsymbol{r}}^\dagger c_{\boldsymbol{r}'} + t_2 \sum_{\langle\langle \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\rangle\rangle} e^{i\phi\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}} c_{\boldsymbol{r}}^\dagger c_{\boldsymbol{r}'} + \mu_{\rm s}\left[\sum_{\boldsymbol{r}\in A} a_{\boldsymbol{r}}^\dagger a_{\boldsymbol{r}} - \sum_{\boldsymbol{r}\in B} b_{\boldsymbol{r}}^\dagger b_{\boldsymbol{r}}\right] \\ &= -t_1 \sum_{\boldsymbol{r}\in B,j} b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}_j}^\dagger a_{\boldsymbol{r}} + t_2 \sum_{\boldsymbol{r},j} \left[e^{i\phi}\, a_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}_j}^\dagger a_{\boldsymbol{r}} + e^{-i\phi}\, b_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}_j}^\dagger b_{\boldsymbol{r}}\right] + \mu_{\rm s}\left[\sum_{\boldsymbol{r}\in A} a_{\boldsymbol{r}}^\dagger a_{\boldsymbol{r}} - \sum_{\boldsymbol{r}\in B} b_{\boldsymbol{r}}^\dagger b_{\boldsymbol{r}}\right]\end{aligned} \tag{40}$$

で与えられる。右辺第 1,2,3 項は各々最近接ホッピング、複素因子 $t_2 e^{i\phi\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}}$ を持つ次近接ホッピング、スタガードポテンシャルである。ここで電子の生成消滅演算子の波数空間 (フーリエ) 表示を

$$a_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\boldsymbol{k}\in{\rm BZ}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} a_{\boldsymbol{k}}, \quad b_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\boldsymbol{k}\in{\rm BZ}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} b_{\boldsymbol{k}}, \tag{41}$$

で定義しよう。N は全副格子数、$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、$\sum_{\boldsymbol{k}\in{\rm BZ}}$ は、ブリルアン・ゾーン (BZ) 全領域についての和を意味する。これをハミルトニアンに代入し、2×2 行列形式でハミルトニアンを以下のように表現できる。

$$\hat{H}_{\rm H} = \sum_{\boldsymbol{k}\in{\rm BZ}} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}}^\dagger & b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \end{pmatrix} H_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} a_{\boldsymbol{k}} \\ b_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix}, \qquad \text{where} \quad H_{\boldsymbol{k}} = h_{\boldsymbol{k}}^{(0)}\sigma_0 + \sum_{\ell=1}^{3} h_{\boldsymbol{k}}^{(\ell)}\sigma_\ell. \tag{42}$$

ここで、$H_{\boldsymbol{k}}$ は 2×2 行列、σ_0 は単位行列、$\sigma_{1,2,3}$ はパウリ行列である。パラメータ $h_{\boldsymbol{k}}^{(\ell)}$ $(\ell = 0,1,2,3)$ は以下の

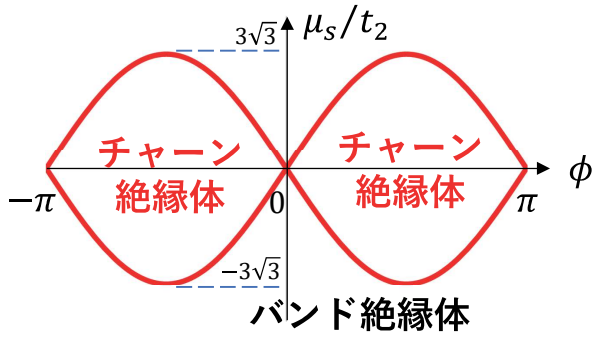

図 7: ハニカム格子ハルデン模型の $(\phi, \mu_s/t_2)$ 空間上の基底状態相図。カイラルエッジ流を持つ 2 つのチャーン絶縁相と通常のバンド絶縁体相が現れる。

ように計算される。

$$h_{\boldsymbol{k}}^{(0)} = 2t_2 \cos\phi \sum_{j=1}^{3} \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_j) \tag{43}$$

$$h_{\boldsymbol{k}}^{(1)} = -t_1 \sum_j \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j) = 4t_1 \left(\frac{1}{4} - \prod_j \cos\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j}{2}\right) \tag{44}$$

$$h_{\boldsymbol{k}}^{(2)} = -t_1 \sum_j \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j) = 4t_1 \prod_j \sin\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j}{2} \tag{45}$$

$$h_{\boldsymbol{k}}^{(3)} = \mu_{\rm s} + 2t_2 \sin\phi \sum_j \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{a}_j) \tag{46}$$

式 (44),(45) では、$\boldsymbol{d}_3 = -\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2$ と三角関数の和積の公式を用いた。これらを用いて、ハルデン模型の 2 つのエネルギーバンドは

$$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{\pm} = h_{\boldsymbol{k}}^{(0)} \quad \pm \sqrt{\left|h_{\boldsymbol{k}}^{(1)}\right|^2 + \left|h_{\boldsymbol{k}}^{(2)}\right|^2 + \left|h_{\boldsymbol{k}}^{(3)}\right|^2} \tag{47}$$

で与えられる。この 2 バンドが接触 (交差) する条件, つまりバンド間ギャップが閉じる条件は、$h_{\boldsymbol{k}}^{(1)} = h_{\boldsymbol{k}}^{(2)} = h_{\boldsymbol{k}}^{(3)} = 0$ で与えらえれる。このとき量子相転移が起きると考えられる。まず、$h_{\boldsymbol{k}}^{(2)} = 4t_1 \prod_j \sin\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j}{2} = 0$ を満たす波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は、いずれかの j に対して $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j = 0$ を満たせばよい。つまり、$\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{d}_j$ と直交すればよい。この条件を $h_{\boldsymbol{k}}^{(1)} = 4t_1\left(\frac{1}{4} - \prod_j \cos\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}_j}{2}\right) = 0$ に代入すれば、$|\boldsymbol{k}| = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ を得る。これを満たす波数 $\boldsymbol{k}$ は 6 点存在する。$\boldsymbol{k}_j (j = 1, 2, 3)$ を $\boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{a}_j = \frac{4\pi}{3}$ かつ $\boldsymbol{k}_j \cdot \boldsymbol{a}_{j'} = -\frac{2\pi}{3} (j' \neq j)$ で定義すれば、6 点の波数は $\boldsymbol{k} = \pm\boldsymbol{k}_j$ と表される。波数が $\boldsymbol{k} = \pm\boldsymbol{k}_j$ を満たすとき、$h_{\boldsymbol{k}}^{(3)} = \mu_{\rm s} \pm 3\sqrt{3}t_2 \sin\phi$ となる。よって、ギャップが閉じる条件

$$\left|\frac{\mu_{\rm s}}{t_2}\right| = 3\sqrt{3}\,|\sin\phi| \tag{48}$$

を得る。これを用いて描いたハルデン模型の基底状態相図が図 7 である。図中の 2 つのチャーン絶縁体相 [57] では、系を特徴づけるチャーン数 (量子ホール伝導度に比例) が各々 ±1 をとり、系の境界近傍では時計回り、または、反時計回りの (つまりカイラルな) エッジ電流が発生している。一方、その外側のバンド絶縁体相はエッジ流を持たない通常の相である。複素因子のある次近接ホッピングにより時間反転対称性が破れており、その結果、チャーン絶縁体相ではカイラルエッジ流が生じている訳である。■ (ハルデン模型の解説終了)

さて、ハルデン模型の結果をフロケ・ハミルトニアン (38) に応用しよう。グラフェンを意識して、スタガードポテンシャルがゼロに近い状況を考えよう ($\mu_{\rm s} \simeq 0$)。ハルデン模型の t_1 と $t_2 e^{i\phi\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}}$ に対応するパラメータが $t_1^{\rm eff}$ と $it_2^{\rm eff}\tau_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$ である。よって、フロケ・ハミルトニアン (38) は、ハルデン模型の次近接ホッピングの位相 $\phi = \pm\pi/2$ 上に位置する。$t_2^{\rm eff}$ の大きさを粗く見積もれば

$$t_2^{\rm eff} \sim \frac{t_1^2 A^2}{\omega} \sim t_1 \frac{t_1 (eE_0 a_0)^2}{(\hbar\omega)^3} \tag{49}$$

となる。最後の式変形で、$|A| = |cE_0/\omega|$ でベクトルポテンシャルから電場強度 E_0 に乗り移り、$\hbar$,e,c と格子定数 a_0 を復活させた。いま、高周波数展開が妥当な領域 $|\hbar\omega| \gg |eE_0 a_0|, |t_1|$ を考えている為、$|t_2^{\rm eff}|$ は $|t_1|$ に比べて小さい。スタガードポテンシャルも十分小さな状況であれば、$|\mu_{\rm s}/t_2^{\rm eff}| < 3\sqrt{3}$ が満たされると考えられる。このとき、フロケ・ハミルトニアンは、図 7 の相図のチャーン絶縁相に位置することになる。よって、グラフェンに円偏光レーザーを印加するフロケ・エンジニアリングでは、エッジ電流が流れるチャーン絶縁体状態に近い状態が実現することが期待される。

最後に、筆者らは、このフロケ・トポロジカル絶縁体の量子スピン液体版を理論的に提案していることを追記しておく [63]。

3.3 金属における逆ファラデー効果

2.4 節で触れた逆ファラデー効果は、量子多体系における最も先駆的なフロケ・エンジニアリングと言ってよいかもしれない。これは、スピン軌道相互作用をもつ物質 (主に磁性体) に、円偏光レーザーを照射し、レーザー由来の有効ゼーマン相互作用が発生し、磁化が生じる現象を指す。有効ゼーマン磁場の向きは光子スピンの向き (右円偏光・左円偏光) と対応している。

2.4 節では、THz レーザーと電子スピンの直接的な結合を介して量子スピン系の磁化を操作する筆者らの理論提案 [39, 64] に少し触れたが、ここでは、高周波数の可視や赤外領域の円偏光を磁性体に照射して生じる電子のダイナミクスを介した逆ファラデー効果 [65–67] に焦点を当てる。この現象の微視的理論は、はじめ Pershan ら [66] によって展開された。彼らは照射円偏光を摂動論的に扱い、有効ゼーマン磁場が電場強度の 2 乗とスピン軌道相互作用の結合定数に比例することを示した。実際、多くの磁性体 [68–72] で逆ファラデー効果が観測されており、磁性研究の磁化測定方法としても応用されている。

ここでは tight-binding 模型に基づいて現代的なフロケ・ハミルトニアンの方法を用いて、逆ファラデー効果の本質的部分を解説しよう。以下の計算は、文献 [73] に基づいている。2 次元正方格子 (x-y 面) 上のラッシュバ型スピン軌道相互作用をもつ電子模型を考える。そのハミルトニアンを

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm K} + \hat{H}_{\rm so} \tag{50}$$

$$\hat{H}_{\rm K} = -t_1 \sum_{\boldsymbol{r}} \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \sum_{j=x,y} c^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_j,\sigma} c_{\boldsymbol{r},\sigma} + {\rm h.c.} \tag{51}$$

$$\hat{H}_{\rm so} = -\frac{\alpha}{2} \sum_{\boldsymbol{r},\sigma,\sigma'} \Big(i(\sigma_y)_{\sigma\sigma'}\, c^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_x,\sigma} c_{\boldsymbol{r},\sigma'} - i(\sigma_x)_{\sigma\sigma'}\, c^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_y,\sigma}\, c_{\boldsymbol{r},\sigma'} \Big) + {\rm h.c.} \tag{52}$$

で定義する。$c_{\boldsymbol{r},\sigma}$ はサイト $\boldsymbol{r}$ のスピン $\sigma(=\uparrow \text{ or } \downarrow)$ を持つ電子の消滅演算子である。格子間隔 a_0 を 1 として、x と y 軸方向の最近接サイト間ベクトル $\boldsymbol{e}_x = (1,0)$ と $\boldsymbol{e}_y = (0,1)$ を導入している。第 1 項 $\hat{H}_{\rm K}$ は最近接ホッピング (運動エネルギー) 項、第 2 項 $\hat{H}_{\rm so}$ がラッシュバスピン軌道相互作用項 [74, 75] である。α がラッシュバパラメータ (結合定数) であり、$(\sigma_a)_{\sigma\sigma'}$ はパウリ行列 $\sigma_a (a = x, y, z)$ の $\sigma\sigma'$ 成分を表している。$\hat{H}_{\rm so}$ において、格子間隔ゼロ ($a_0 \to 0$) の連続極限を考えれば、この項がラッシュバ項の第 1 量子化表示

$$\alpha\,(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\sigma})_z = -\alpha\,(i\,\sigma_y\,\partial_x - i\,\sigma_x \partial_y) \tag{53}$$

と繋がっていることにすぐ気づくだろう。スピン軌道相互作用により、↑スピンと↓スピンの世界が結合している。この系に円偏光レーザーを印加する。ベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{A}(t) = A\left(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0\right) \tag{54}$$

で定義する。対応する AC 電場を $\boldsymbol{E}(t) = E_0(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ とすると、ベクトルポテンシャルの振幅は $A = \frac{c}{\omega}E_0$ となる。AC 磁場によるゼーマン相互作用は、今考える金属の逆ファラデー効果の主要項ではないので、無視する。この円偏光の効果をパイエルス位相の形式でハミルトニアンに取り込むとき、ホッピングの各項を

$$c^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_j}\, c_{\boldsymbol{r}} \;\mapsto\; e^{i\frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{e}_j}\, c^\dagger_{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{e}_j}\, c_{\boldsymbol{r}} \tag{55}$$

と変更すればよい。以降、前節と同じように、$-\frac{e}{\hbar c}A \to A$ と略記しよう。生成消滅演算子のフーリエ変換

$$c_{\boldsymbol{r},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} c_{\boldsymbol{k},\sigma}, \qquad c^\dagger_{\boldsymbol{r},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} c^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} \tag{56}$$

を定義する。$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、N は全サイト数である。以上より、円偏光レーザー中の 2 次元ラッシュバ電子系のハミルトニアンは 2×2 行列形式で

$$\hat{H}(t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow}\; c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right) \begin{pmatrix} \varepsilon_{\boldsymbol{k},A}(t) & \gamma_{\boldsymbol{k},A}(t) \\ \gamma^*_{\boldsymbol{k},A}(t) & \varepsilon_{\boldsymbol{k},A}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k},\uparrow} \\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow} \end{pmatrix} \tag{57}$$

と表示できて、行列要素は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\boldsymbol{k},A}(t) &= -2t_1\left[\cos(k_x + A_x(t)) + \cos(k_y + A_y(t))\right], \\ \gamma_{\boldsymbol{k},A}(t) &= \alpha\left[i\sin(k_x + A_x(t)) + \sin(k_y + A_y(t))\right] \end{aligned} \tag{58}$$

で与えられる。続いて、高周波数展開からフロケ・ハミルトニアンを求めよう。このために前節と同じで上記時間依存ハミルトニアンの時間依存部分をベッセル関数を用いて書き換えておくと便利である。$e^{\pm iz\sin\omega t}$ と $e^{\pm iz\cos\omega t}$ のフーリエ変換

$$e^{\pm iz\sin\omega t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm 1)^n J_n(z) e^{in\omega t}, \qquad e^{\pm iz\cos\omega t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm 1)^n J_n(z) i^n\, e^{in\omega t} \tag{59}$$

を利用すれば、ハミルトニアンの中の行列の各成分はベッセル関数 $J_n(A)$ を用いて

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\boldsymbol{k},A}(t) &= -2t_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[i^n \cos\left(k_x - \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(k_y + \frac{n\pi}{2}\right)\right] J_n(A) e^{-in\omega t}, \\ \gamma_{\boldsymbol{k},A}(t) &= \alpha \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[i^{n+1} \sin\left(k_x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(k_y + \frac{n\pi}{2}\right)\right] J_n(A)\, e^{-in\omega t}. \end{aligned} \tag{60}$$

と書き換えられる。このベッセル関数の表示を使えば、ハミルトニアンのフーリエ成分 $\hat{H}_n$ は

$$\hat{H}_n = J_n(A) \sum_{\boldsymbol{k}} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow}, c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right) \boldsymbol{h}^{(n)}_{\boldsymbol{k}} \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k},\uparrow} \\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow} \end{pmatrix} \tag{61}$$

と書けて、2×2 行列 $\boldsymbol{h}^{(n)}_{\boldsymbol{k}}$ の各成分は

$$h^{(n)}_{\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow} = h^{(n)}_{\boldsymbol{k}\downarrow\downarrow} = -2t_1\left[i^n \cos\left(k_x - \frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(k_y + \frac{n\pi}{2}\right)\right], \tag{62}$$

$$h^{(n)}_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow} = \left(h^{(-n)}_{\boldsymbol{k}\downarrow\uparrow}\right)^* = \alpha\left[i^{n+1} \sin\left(k_x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(k_y + \frac{n\pi}{2}\right)\right] \tag{63}$$

と計算できる。フロケ・ハミルトニアンの $1/\omega$ のゼロ次項である時間平均ハミルトニアン $\hat{H}_0$ は以下で与えられる。

$$\hat{H}_0 = J_0(A)\sum_{\boldsymbol{k}}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow}, c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right)\begin{pmatrix}\varepsilon_{\boldsymbol{k}} & \gamma_{\boldsymbol{k}}\\ \gamma^*_{\boldsymbol{k}} & \varepsilon_{\boldsymbol{k}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{\boldsymbol{k},\uparrow}\\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow}\end{pmatrix} \tag{64}$$

新しい記号 $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \varepsilon_{\boldsymbol{k},A=0}$、$\gamma_{\boldsymbol{k}} = \gamma_{\boldsymbol{k},A=0}$ を導入した。一方、$1/\omega$ の 1 次項は、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\hat{H}_{-n},\hat{H}_n]}{n\omega} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_n^2(A)}{n\omega}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\sum_{ijkl} h^{(-n)}_{\boldsymbol{k}ij} h^{(+n)}_{\boldsymbol{k}'kl}\left[c^\dagger_{\boldsymbol{k},i}c_{\boldsymbol{k},j},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k}',k}c_{\boldsymbol{k}',l}\right]\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_n^2(A)}{n\omega}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right)\left[\boldsymbol{h}^{(-n)}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{h}^{(+n)}_{\boldsymbol{k}}\right]\begin{pmatrix}c_{\boldsymbol{k},\uparrow}\\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right)\begin{pmatrix}B_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k}) & 0\\ 0 & -B_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{\boldsymbol{k},\uparrow}\\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow}\end{pmatrix}\\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} B_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})\hat{S}^z_{\boldsymbol{k}}\end{aligned} \tag{65}$$

と計算できる。交換関係の分母で $\hbar \to 1$ と略記した。また 1 行目で $J_{-n}(A) = (-1)^n J_n(A)$ を用いた。最後の行の $\hat{S}^z_{\boldsymbol{k}}$ は波数空間のスピン演算子である。

$$\hat{S}^z_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k},\uparrow},\ c^\dagger_{\boldsymbol{k},\downarrow}\right)\sigma_z\begin{pmatrix}c_{\boldsymbol{k},\uparrow}\\ c_{\boldsymbol{k},\downarrow}\end{pmatrix}. \tag{66}$$

この表式から、フロケ・ハミルトニアンの $1/\omega$ 項は有効ゼーマン相互作用とみなすことができる。有効磁場 B_{eff} は

$$\begin{aligned}B_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k}) &= 2\left(\left|h^{(+n)}_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}\right|^2 - \left|h^{(-n)}_{\boldsymbol{k}\uparrow\downarrow}\right|^2\right)\\ &= 8\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n J_n^2(A)}{n\omega}\cos\frac{(n+1)\pi}{2}\sin\left(k_x - \frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(k_y + \frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned} \tag{67}$$

と計算される。有効磁場の向きは円偏光の伝搬方向と平行である。$1/\omega$ の項からこのゼーマン項が生じていることから、円偏光の向き (光子のスピン) を変える ($\omega \to -\omega$) ことで、磁場の向きもスイッチできることを認識できる。前節のフロケ・トポロジカル絶縁体と同様に、円偏光により「有効的に」時間反転対称性を破ることが重要であり、直線偏光ではこの有効磁場は生じない。有効磁場が α^2 に比例していることから、スピン軌道相互作用と円偏光がこのフロケ・エンジニアリングの必要条件であることも分かる。以上のことから、円偏光レーザーを 2 次元ラッシュバ電子系に印加するフロケ・エンジニアリングでは、有効磁場が発生し、磁化を高速制御できること (すなわち逆ファラデー効果) が示唆される。

最後に有効磁場の粗い見積もりをしよう。この磁場の次元 (今の notation ではエネルギー次元) を正しく表現するには、式 (67) の中で、$\omega \to \hbar\omega$、ベッセル関数の引数を $A \to -\frac{e}{\hbar c}A = -\frac{eE_0}{\hbar\omega}$ として、格子間隔 a_0 を復活させればよい。いま高周波数展開が妥当な領域 $|\hbar\omega| \gg |eE_0 a_0|$ を考えている為、ベッセル関数は

$$J_n\left(\frac{eE_0}{\hbar\omega}\right) \simeq \frac{1}{n!}\left(\frac{eE_0}{2\hbar\omega}\right)^n + \mathcal{O}\left(\left(\frac{eE_0}{2\hbar\omega}\right)^{n+2}\right) \tag{68}$$

と近似できる ($n \geq 1$)。よって、有効磁場の大きさを

$$B_{\mathrm{eff}} \sim \alpha\frac{\alpha(eE_0 a_0)^2}{(\hbar\omega)^3} \tag{69}$$

と見積もることができる。ただし、この逆ファラデー効果の有効磁場 B_{eff} は波数 $\boldsymbol{k}$ 依存性を持つ。

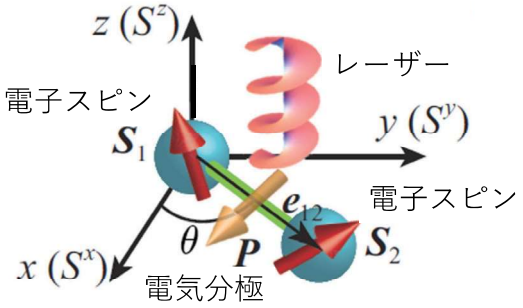

図 8: レーザー照射下のマルチフェロイック 2 スピンモデル。

3.4 量子スピン系・マルチフェロイクスのフロケ・エンジニアリング

磁性絶縁体 (量子スピン系) におけるフロケ・エンジニアリングを考えよう。2.5.2 節などで述べたように、磁性体の磁気励起は GHz から THz 帯に分布している為、同周波数帯のレーザーや電磁波がフロケ・エンジニアリングに最適である。通常の磁性体における電磁場と電子スピンの典型的結合はゼーマン相互作用であるが、ここではそれに加えて、マルチフェロイクス (強誘電磁性体) で現れる磁気自由度と電気分極の間の電気磁気結合も考える。マルチフェロイクスとは広い意味では複数 (マルチ) の強的 (フェロ) 秩序が結合した系を指すが、ここではスピン軌道相互作用やスピン・フォノン結合を介して、電子スピン (磁性) と電気分極が強く結合した磁性絶縁体 [76,77] を指す言葉として使用する。

マルチフェロイクスにおけるフロケ・エンジニアリングの本質を考える為には、図 8 の円偏光レーザー中の円偏光レーザー中の 2 スピン模型を考えれば十分である。2 スピンは x-y 平面内に存在し、z 方向に平行に伝搬する円偏光レーザーがスピン系に印加されている。この模型のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm 2spin}(t) = \hat{H}_{\rm mag} - \boldsymbol{B}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{S}} - \boldsymbol{E}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{P}} \tag{70}$$

で与えられる。第 1 項 $\hat{H}_{\rm mag}$ は、レーザー印加前の 2 スピン系の磁気的相互作用であり、通常は交換相互作用が $\hat{H}_{\rm mag}$ の主要項となる。$\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ は全スピンであり、$\hat{\boldsymbol{S}}_{1,2}$ が 2 つの電子スピンを表している。一方、$\hat{\boldsymbol{P}}$ は 2 スピン系の電気分極であり、マルチフェロイクス系ではスピンと電気分極が強く結合している為、$\hat{\boldsymbol{P}}$ はスピン自由度の関数と考えてよい。第 2 項が AC ゼーマン相互作用、第 3 項が AC 電場と分極の結合を表している。いま円偏光を考えているので、AC 電場を $\boldsymbol{E}(t) = E_0(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$、対応する AC ゼーマン結合定数ベクトルを $\boldsymbol{B}(t) = B_0(\sin(\omega t), -\cos(\omega t), 0)$ とする。E_0 が AC 電場強度、$B_0 = g\mu_B H_{\rm ac}$ が AC ゼーマン結合定数、$H_{\rm ac} = E_0/c$ が AC 磁場強度 (c は光速) を表している。式 (70) において、$\hat{\boldsymbol{S}}$ と $\hat{\boldsymbol{P}}$ を各々バルク磁性体模型の全スピンとバルク電気分極と読み直せば、この模型は円偏光レーザー中のバルクマルチフェロイクスのモデルと解釈してよい。この周期駆動系のフロケ・ハミルトニアンを求めてみよう [19,78]。簡単な計算により、ハミルトニアン $\hat{H}_{\rm 2spin}(t)$ のフーリエ成分は $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\rm mag}$、$\hat{H}_{\pm 1} = -\frac{1}{2}(E_0\hat{P}^{\pm} \pm iB_0\hat{S}^{\pm})$ と求められる。ここで昇降演算子 $\hat{S}^{\pm} = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$ と $\hat{P}^{\pm} = \hat{P}^x \pm i\hat{P}^y$ を定義した。これらより、$1/\omega$ オーダーまでの有効ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm eff} = \hat{H}_{\rm mag} - \frac{1}{2\hbar\omega}\left[B_0^2\hat{S}^z - iE_0^2[\hat{P}^x, \hat{P}^y] - iE_0B_0([\hat{P}^x, \hat{S}^x] + [\hat{P}^y, \hat{S}^y])\right] \tag{71}$$

となる。これは円偏光レーザー照射下のマルチフェロイクスのフロケ・ハミルトニアンの一般公式と言ってよい。第 2 項以降の $1/\omega$ に比例する項がフロケ・エンジニアリングで生じた項である。その中の $\hat{S}^z$ 項は、円偏光レーザーで現れた新しいゼーマン相互作用であり、これはまさに 2.4 節で議論した THz レーザーによる逆ファラデー効果を表している。それ以外の E_0^2 と E_0B_0 に比例する項は、通常の磁性絶縁体では発生せず、電気磁気結合を持つマルチフェロイクスで生じる項である。

最後に、具体的な電気磁気結合に焦点を当て、電気分極 $\hat{\boldsymbol{P}}$ がスピンの関数で与えられる場合を考えよう。マルチフェロイクスの研究 [76,77] により、スピンと電気分極をつなぐ多彩な電気磁気結合が解明されているが、ここでは、電気分極が隣接スピンの外積 $\hat{\boldsymbol{V}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 \times \hat{\boldsymbol{S}}_2$ (ベクトル・スピンカイラリティ) に比例する場合 [79] を考える：

$$\hat{\boldsymbol{P}} = g_{\mathrm{me}} \boldsymbol{e}_{12} \times (\hat{\boldsymbol{S}}_1 \times \hat{\boldsymbol{S}}_2) \tag{72}$$

g_{me} は電気磁気結合定数であり、一般に振動数 ω に依存する。$\boldsymbol{e}_{12} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ は 2 つのスピンを結ぶ単位ベクトル (図 8 を見よ)、$\times$ は外積を表している。このような結合は、遷移金属酸化物で磁性イオン間に酸素を介した超交換相互作用を持つ系において、しばしば現れる。式 (72) がスピンの外積に比例する為、この電気磁気結合のメカニズムを逆ジャロシンスキー・守谷 (DM) 機構やスピンカレント機構と呼ぶこともある。この分極 $\hat{\boldsymbol{P}} = g_{\mathrm{me}}(\sin\theta \hat{V}^z, -\cos\theta \hat{V}^z, \cos\theta \hat{V}^y - \sin\theta \hat{V}^x)$ を有効ハミルトニアン (71) に代入すれば

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}} = \hat{H}_{\mathrm{mag}} - \frac{B_0^2}{2\hbar\omega}\hat{S}^z - \frac{g_{\mathrm{me}} E_0 B_0}{2\hbar\omega} \boldsymbol{e}_{12} \cdot \hat{\boldsymbol{V}} \tag{73}$$

を得る。最後の項は AC 電場と AC 磁場両者の交差相関で初めて現れる項であり、レーザー誘起 DM 相互作用といえる。DM 相互作用は隣接スピン間の角度を 90 度にしようとし、一方元々多くの磁性体に存在する交換相互作用は隣接スピンを共線的 (平行または反平行平行または反平行) にしようとする。両者が共存すれば、隣接スピンが適当な相対角度を持つ非共線的スピン構造は生じる。従って、有効模型 (73) は、逆 DM 機構をもつマルチフェロイクスに円偏光レーザーを照射すると、非共線的磁気構造を生成または消滅させられることを示唆している。模型 (73) の結果は容易に多スピン系に拡張することが可能であり、実際、円偏光レーザー中の 1 次元量子スピン・マルチフェロイクス模型の数値解析によりベクトル・スピンカイラリティの期待値がレーザーで発現することが示されている [78]。

逆 DM 機構とは別の代表的電気磁気結合として、電気分極が交換相互作用 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{r}'}$(すなわち局所的磁気エネルギー) に比例する場合がある。これは磁歪型電気磁気結合と呼ばれる。これを利用したフロケ・エンジニアリングとして、磁歪型の電気磁気結合を持つハニカム・キタエフ模型に円偏光レーザーを印加しトポロジカルスピン液体を誘導する方法が提案されている [63]。

3.5 高周波数展開の役割とそれを超えた解析

3 章では、高周波数展開法を用いて、具体的なフロケ・エンジニアリングの例を紹介してきた。高周波数展開の低次項から、各周期駆動系で発現するフロケ・エンジニアリングの可能性を読み取ることができた。高周波数展開の意義は、まさに「注目する系において、どのようなフロケ・エンジニアリングが可能であるか」を見極めることにあるといえる。また必要な計算は交換関係の計算のみであり、低次項の計算は比較的容易に実行可能である。このようなことから、高周波数展開はフロケ・エンジニアリングの理解を深める上で、大変有効な方法である。高周波数展開から質的に新しいフロケ・エンジニアリングを予言できれば、それ自体新しい成果 (のタネ) と言えるだろう。

しかし、より定量的な予言を与えるには、高周波数展開は不十分である。2.3 節で述べたように、周期駆動量子系において、低次項で近似したフロケ・ハミルトニアンの基底状態が実現するわけではなく、そのフロケ・ハミルトニアンで系の状態が時間発展するのである。それ故、高周波数展開そのものには観測量の時々刻々の値を予言する能力はない。理論研究の最前線では、フロケ・ハミルトニアンから興味深いフロケ・エンジニアリングを予言し、その定量的な実現可能性を示すために、系の時間発展を計算することがよく行われる。その際、AC 外場中の量子系のシュレディンガー方程式の数値計算や非平衡グリーン関数法がしばしば応用される。

さらに、4 章で述べるように、一般に、AC 外場中の物質系の時間発展では、環境との結合による散逸の効果を無視することは難しい。それ故、散逸の効果を取り込んだ理論解析が重要となる。そこでは、グリーン関数法や量子マスター方程式の方法などが活躍する。

4　周期駆動量子開放系と量子マスター方程式

2 章と 3 章では、孤立量子系のフロケ・エンジニアリングを記述する有効な方法である高周波数展開法を用いて、フロケ・エンジニアリングの基本的事項を解説した。しかし、2.3 節でも述べたように、高周波数展開には短時間のダイナミクスしか記述できないという限界があり、また実際の物質におけるフロケ・エンジニアリングを考察するとき、注目する系には取り込まれていない環境との結合の効果を無視することはできない。すなわち、AC 外場を注目する系に印加した際、環境との結合を介して、系のエネルギーや他の物理量の一部が散逸してしまう訳である。

このとき、AC 外場を長時間印加すると、AC 外場による効果と散逸の効果が拮抗し、非平衡定常状態が実現すると期待される。これは、孤立量子系では、AC 外場の長時間印加で加熱してしまうこととは対照的である。この非平衡定常状態を理論的に記述する方法として、グリーン関数 [7,9–12,80] と量子マスター方程式 [22–25,81,82] の 2 つの戦略が有望である。

ここでは、量子マスター方程式に基づく筆者らに最近の成果 [82,83] に基づき、周期駆動された散逸量子系のフロケ・エンジニアリングの理論を解説する。

●筆者の能力および体力不足で、4 章の解説を夏の学校テキストに載せることはできなかったが、ゼミ本番では、この 4 章の内容もしっかり解説する予定である。

Acknowledgement

この講義ノートの作成では、多くの共同研究者や実験研究者との議論を通じて得られた知識や解析方法が役に立っている。特に、池田達彦氏、岡隆史氏、髙吉慎太郎氏、石塚大晃氏、北村想太氏、藤田浩之氏、東川翔氏、鎮西弘毅氏に感謝したい。また本研究室大学院生の鈴木黎弥氏には 3 章の計算で大変お世話になった。このノート作成にかかわる研究では、科研費 (No. 17K05513 及び No. 20H01830) と新学術領域「量子液晶の理論構築」(No. JP19H05825) の支援を受けている。

参考文献

[1] 固体物理 特集号「高強度テラヘルツ・赤外パルスが拓く非平衡物性」(アグネ技術センター，2019 年 11 月号).

[2] 岩井伸一郎「多電子系の超高速光誘起相転移-光で見る・操る・強相関電子系の世界-」(共立出版，2016 年).

[3] 腰原伸也「光誘起構造相転移: 光が拓く新たな物質科学」(共立出版，2016 年).

[4] 固体物理 特集号「スピントロニクスの新展開-スピン変換現象を中心に」(アグネ技術センター，2015 年 11 月号).

[5] *Spin Current*, edited by S. Maekawa, S. O. Valenzuela, E. Saitoh, and T. Kimura (Oxford University Press, Oxford, England, 2012).

[6] 齊藤英治，村上修一「スピン流とトポロジカル絶縁体-量子物性とスピントロニクスの発展-」(共立出版，2014 年).

[7] 多々良源「スピントロニクスの物理-場の理論の立場から」(内田老鶴圃，2019 年).

[8] 例えば *Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions* edited by F. Binder, L. A. Correa, C. Gogolin, J. Anders, and G. Adesso (Springer, 2019).

[9] A. M. Zagoskin, *Quantum Theory of Many-Body Systems: Techniques and Applications 2nd ed.* (Springer, New York, 2014).

[10] G. Stefanucci and R. v. Leeuwen, *Nonequilibrium Many-Body Theory of Quantum Systems: A Modern Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2013).

[11] H. J. W. Haug, and A-P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors* (Springer, 2007).

[12] 齋藤圭司，物性研究「非平衡輸送現象」(2009 年).

[13] J. H. Shirley, Phys. Rev. **138**, B979 (1965).

[14] H. Sambe, Phys. Rev. A **7**, 2203 (1973).

[15] M. Bukov, L. D'Alessio, and A. Polkovnikov, Adv. in Phys. **64**, 139 (2015).

[16] A. Eckardt and E. Anisimovas, New J. Phys. **17**, 93039 (2015).

[17] A. Eckardt, Rev. Mod. Phys. **89**, 011004 (2017).

[18] T. Mikami, S. Kitamura, K. Yasuda, N. Tsuji, T. Oka, and H. Aoki, Phys. Rev. B **93**, 144307 (2016).

[19] 佐藤正寛，髙吉慎太郎，岡隆史「レーザー駆動超高速スピントロニクスとフロケ・エンジニアリング」(日本物理学会誌，2017 年 11 月号).

[20] T. Oka and S. Kitamura, Ann. Rev. Cond. Mat. Phys. **10**, 387 (2019).

[21] M. Sato, *Floquet Theory and Ultrafast Control of Magnetism* (Chap. 11) in *Chirality, Magnetism and Magnetoelectricity*, edited by E. Kamenetskii (Springer, 2021).

[22] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2007).

[23] R. Alicki, and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications* (Springer; 2007).

[24] 沙川貴大，上田正仁「量子測定と量子制御」(サイエンス社，2015 年).

[25] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems* (World Scientific, 1999).

[26] ブロッホの定理は大抵の固体物理や物性物理のテキストで解説されている。例えば、斯波弘行「基礎の固体物理学」(培風館，2007 年) を見よ。

[27] 犬井鉄郎，田辺行人，小野寺嘉孝「応用群論」増補版　(裳華房，1980 年).

[28] ブロッホの定理は多くの和文献で解説されているが、フロケの定理の証明が載っている和文献を見つけることは難しい。戸田盛和「振動論」(培風館，1968 年) に簡単な解説がある。

[29] 縮退摂動論は、量子多体系の問題を解析する上でしばしば応用される。代表的応用例の 1 つは、ハバード模型からハイゼンベルグ模型を導出する計算である。例えば、 A. Auerback, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, (Springer, 1998) を見よ。

[30] T. Kuwahara, T. Mori, and K. Saito, Ann. Phys. **367**, 96 (2016).

[31] T. Mori, T. Kuwahara, and K. Saito, Phys. Rev. Lett. **116**, 120401 (2016).

[32] J. M. Deutsch, Phys. Rev. A **43**, 2046 (1991).

[33] J. Eisert, M. Friesdorf, and C. Gogolin, Nature Physics **11**, 124 (2015).

[34] L. D'Alessio, Y. Kafri, A. Polkovnikov, and M. Rigol, Advances in Physics **65**, 239 (2016).

[35] T. Mori, T. N. Ikeda, E. Kaminishi, and M. Ueda, Journal of Phys. B **51**, 112001 (2018).

[36] A. Lazarides, A. Das, and R. Moessner, Phys. Rev. E **90**, 012110 (2014).

[37] L. D' Alessio and M. Rigol, Phys. Rev. X **4**, 41048 (2014).

[38] A. Abragam, *The Principles of Nuclear Magnetism* (Oxford Univ. Press, 1983).

[39] S. Takayoshi, M. Sato, and T. Oka, Phys. Rev. B **90**, 214413 (2014).

[40] P. S. Pershan, J. P. Van Der Ziei, and L. D. Malmstrom, Phys. Rev. **143**, 574 (1966).

[41] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation* (World Scientific, 2010).

[42] H. Hirori, A. Doi, F. Blanchard, and K. Tanaka, Appl. Phys. Lett. **98**, 91106 (2011).

[43] Y. Mukai, H. Hirori, T. Yamamoto, H. Kageyama, and K. Tanaka, New J. Phys. **18**, 013045 (2016).

[44] B. Liu, H. Bromberger, A. Cartella, T. Gebert, M. F′orst, and A. Cavalleri, Opt. Lett. **42**, 129 (2017).

[45] M. Sato, T. Higuchi, N. Kanda, K. Konishi, K. Yoshioka, T. Suzuki, K. Misawa, and M. Kuwato-Gonokami, Nature Photo. **7**, 724 (2013).

[46] T. N. Ikeda, and M. Sato, Phys. Rev. B **100**, 214424 (2019).

[47] D. H. Dunlap, and V. M. Kenkre, Phys. Rev. B **34**, 3625 (1986).

[48] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hanggi, Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991).

[49] T. Ishikawa, Y. Sagae, Y. Naitoh, Y. Kawakami, H. Itoh, K. Yamamoto, K. Yakushi, H. Kishida, T. Sasaki, S. Ishihara, Y. Tanaka, K. Yonemitsu, and S. Iwai, Nature Comm. **5**, 5528 (2014).

[50] H. Lignier, C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch, and E. Arimondo, Phys. Rev. Lett. **99**, 220403 (2007).

[51] T. Oka and H. Aoki, Phys. Rev. B **79**, 081406(R) (2009).

[52] T. Kitagawa, T. Oka, A. Brataas, L. Fu, and E. Demler, Phys. Rev. B **84**, 235108 (2011).

[53] N. H. Lindner, G. Refael, and V. Galitski, Nature Phys. **7**, 490 (2011).

[54] Y. H. Wang, H. Steinberg, and P. J-H. N. Gedik, Science **342**, 453 (2013).

[55] J. W. McIver, B. Schulte, F.-U. Stein, T. Matsuyama, G. Jotzu, G. Meier and A. Cavalleri, Nature Phys. **16**, 38 (2020).

[56] G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif and T. Esslinger, Nature **515**, 237 (2014).

[57] 例えば、野村健太郎「トポロジカル絶縁体・超伝導体」(丸善，2016 年).

[58] A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig, Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).

[59] S. Ryu, A. Schnyder, A. Furusaki, and A. Ludwig, New J. Phys. **12**, 065010 (2010).

[60] A. Y. Kitaev, AIP Conf. Proc. **1134**, 22 (2009).

[61] 例えば *Physics of Graphene*, edited by H. Aoki and M. S. Dresselhaus (2014).

[62] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).

[63] M. Sato, Y. Sasaki, and T. Oka, arXiv:1404.2010.

[64] S. Takayoshi, H. Aoki, and T. Oka, Phys. Rev. B **90**, 085150 (2014).

[65] L. P. Pitaevskii Sov. Phys. JETP **12**, 1008 (1961).

[66] P. S. Pershan, J. P. van der Ziel, and L. D. Malmstrom, Phys. Rev. **143**, 574 (1966).

[67] A. Kirilyuk, A. V. Kimel, and T. Rasing, Rev. Mod. Phys. **82**, 2731 (2010).

[68] J. P. van der Ziel, P. S. Pershan, and L. D. Malmstrom, Phys. Rev. Lett. **15**, 190 (1965).

[69] A. V. Kimel, A. Kirilyuk, P. A. Usachev, R. V. Pisarev, A. M. Balbashov, and Th. Rasing, Nature **435**, 655 (2005).

[70] T. Makino, F. Liu, T. Yamasaki, Y. Kozuka, K. Ueno, A. Tsukazaki, T. Fukumura, Y. Kong, and M. Kawasaki, Phys. Rev. B **86**, 064403 (2012).

[71] F. Hansteen, A. Kimel, A. Kirilyuk, and T. Rasing, Phys. Rev. B **73**, 014421 (2006).

[72] T. Satoh, S-J. Cho, R. Iida, T. Shimura, K. Kuroda, H. Ueda, Y. Ueda, B. A. Ivanov, F. Nori, and M. Fiebig, Phys. Rev. Lett. **105**, 077402 (2010).

[73] Y. Tanaka, T. Inoue, and M. Mochizuki, New J. Phys. **22**, 083054 (2020).

[74] 柳瀬陽一，播磨尚朝，初等固体物理講座「スピン軌道相互作用と結晶中の電子状態」固体物理 (アグネ技術センター，2011 年).

[75] A. Manchon, H. C. Koo, J. Nitta, S. M. Frolov, and R. A. Duine, Nature Mat. **14**, 871 (2015).

[76] Y. Tokura, S. Seki, and N. Nagaosa, Rep. Prog. Phys. **77**, 076501 (2014).

[77] 有馬孝尚「マルチフェロイクス—物質中の電磁気学の新展開—」(共立出版，2014 年).

[78] M. Sato, S. Takayoshi, and T. Oka, Phys. Rev. Lett. **117**, 147202 (2016).

[79] H. Katsura, N. Nagaosa, and A. V. Balatsky, Phys. Rev. Lett. **95**, 057205 (2005).

[80] N. Tsuji, T. Oka, and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **103**, 047403 (2009).

[81] H.-P. Breuer, W. Huber, F. Petruccione, Phys. Rev. E **61**, 4883 (2000).

[82] T. N. Ikeda, and M. Sato, Sci. Adv. **6**, eabb4019 (2020).

[83] T. N. Ikeda, K. Chinzei, and M. Sato, in preparation.